Journal of Quality Engineering and Management

www.pqprc.ir

J. Qual. Eng. Manag. Vol. 14, No. 2 (2024) 177–198.

Paper Type: Original Article

Bayesian Inference of the Parameters under the Generalized Power Lindley Distribution Based on the Hybrid Type-II Censoring Scheme: A Simulation Study and Application

Nassrin Balouch Roodbari[1], Iman Makhdoom[2,*]

[1] Department of Statistics, Ahvaz Branch, Islamic Azad University, Ahvaz, Iran; N_roodbary@yahoo.com.
[2] Department of Statistics, Payame Noor University, Tehran, Iran; makhdoom@pnu.ac.ir.

Citation:

Received: 13 November 2023 *Revised: 16 February 2024* *Accepted: 02 April 2024*	Balouch Roodbari, N., & Makhdoom, I. (2024). Bayesian inference of the parameters under the generalized power lindley distribution based on the hybrid type-II censoring scheme: a simulation study and application. *Journal of Quality Engineering and Management, 14*(2), 177-198.

Abstract

Purpose: In this paper, we examine the Bayesian inference of the parameters of the generalized power Lindley distribution in the presence of type two hybrid censored data.

Methodology: To estimate the maximum likelihood of the parameters, given that the estimates cannot be obtained implicitly and do not have a closed form, we employ the EM algorithm and utilize Fisher's information matrix to construct asymptotic confidence intervals. Additionally, when estimating the parameters of the generalized power Lindley distribution, which we denote as EPL throughout the article, we employ two Lindley approximation methods and Markov chain Monte Carlo under the squared error loss function. We obtain HPD confidence intervals according to Bayesian estimates. Then we compare two Bayesian methods using simulation studies.

Findings: It can be observed that the Monte Carlo method for the three-parameter distribution exhibits less bias and greater consistency than the Bayesian parameter estimates derived from the Lindley approximation. In distributions with many parameters, the MCMC method yields more accurate forecasts than the Lindley approximation, and convergence occurs more rapidly in this case. The MSE estimates in the Lindley approximation, as shown in Table 2, are significantly larger than the dispersion of data with a similar sample size from the MCMC method, as presented in Table 3. We also provide an example of real data.

Originality/Value: Given that no study has been conducted so far on the generalized Lindley power distribution in the presence of censored hybrid type II, the findings of this study can be used for future studies.

Keywords: Bayesian estimation, Maximum likelihood estimation, Generalized Lindley power, Monte Carlo Markov chain, EM algorithm.

Corresponding Author: makhdoom@pnu.ac.ir
10.48313/jqem.2024.218909
Licensee System Analytics. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0).

مهندسی و مدیریت کیفیت

www.pqprc.ir

دوره ۱۴، شماره (۲)، (۱۴۰۳)، ۱۹۸-۱۷۷

نوع مقاله: پژوهشی

استنباط بیزی پارامترهای توزیع لیندلی توانی تعمیم‌یافته بر اساس طرح سانسور هیبرید نوع دوم: یک مطالعه شبیه‌سازی و کاربردی

نسرین بلوچ رودباری[۱]، ایمان مخدوم[۲،*]

[۱]گروه آمار، واحد اهواز، دانشگاه آزاد اسلامی، اهواز، ایران.

[۲]گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران.

چکیده

هدف: در این پژوهش، استنباط بیزی پارامترهای توزیع لیندلی توانی تعمیم‌یافته در حضور داده‌های سانسور شده هیبرید نوع دوم موردبررسی قرار می‌گیرد.

روش‌شناسی پژوهش: برای برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها، با توجه به اینکه این برآوردها فرم بسته‌ای ندارند و به‌صورت ضمنی قابل‌محاسبه نیستند، از الگوریتم *EM* استفاده شده و ماتریس اطلاع فیشر به‌منظور ساخت فواصل اطمینان مجانبی به‌کار گرفته می‌شود. در ادامه، برای برآورد پارامترهای توزیع لیندلی توانی تعمیم‌یافته که در این مقاله با نماد *EPL* نمایش داده می‌شود، دو روش بیزی، شامل تقریب لیندلی و زنجیره مارکوف مونت‌کارلو، تحت تابع زیان مربعات خطا مورداستفاده قرار می‌گیرند. سپس، فواصل اطمینان بیشینه پسین (*HPD*) بر اساس برآوردهای بیزی محاسبه می‌شود. به‌منظور ارزیابی عملکرد روش‌های پیشنهادی، مطالعات شبیه‌سازی انجام شده و نتایج حاصل از دو روش بیزی مقایسه می‌شوند.

یافته‌ها: یافته‌ها نشان می‌دهند که روش *MCMC* در برآورد پارامترهای توزیع سه‌پارامتری، دارای اریبی کمتر بوده و نسبت به‌تقریب لیندلی از سازگاری بیشتری برخورداراست. در توزیع‌های با پارامترهای زیاد، روش *MCMC* برآوردهای بهتری نسبت به‌تقریب لیندلی ارایه می‌دهد و همگرایی در این حالت سریع‌تر رخ می‌دهد. *MSE* برآوردها در تقریب لیندلی با توجه به **جدول ۲** خیلی بیشتر از پراکندگی داده‌ها با حجم نمونه مشابه از روش *MCMC* در **جدول ۳** است. در پایان، یک مجموعه داده‌ی واقعی برای نشان دادن کاربرد عملی روش‌های پیشنهادی ارایه می‌شود.

اصالت/ارزش‌افزوده علمی: با توجه به اینکه تاکنون هیچ مطالعه‌ای در خصوص توزیع لیندلی توانی تعمیم‌یافته در حضور داده‌های سانسور شده هیبرید نوع دوم انجام نشده است، یافته‌های این پژوهش می‌تواند برای مطالعات بعدی مورداستفاده قرار گیرد.

کلیدواژه‌ها: تخمین بیزی، تخمین حداکثر احتمال، توان لیندلی تعمیم‌یافته، زنجیره مونت‌کارلو مارکوف، الگوریتم *EM*.

۱- مقدمه

توزیع لیندلی یک پارامتری برای داده‌هایی که شکل نرخ خطرات‌ها یکنواخت نیست، نخستین بار توسط قیطانی و همکارانش [1] معرفی شد. تابع چگالی احتمال آن به‌صورت زیر است:

$$f\ x;\beta) = \frac{\beta^2}{1+\beta}\ 1+x)e^{-\beta x},\quad x،\beta>0. \qquad (۱)$$

قیطانی و همکارانش[2] ویژگی‌ها و کاربردهای توزیع لیندلی را در زمینه قابلیت اعتماد بررسی کرده و به این نتیجه رسیدند که این توزیع نسبت به توزیع نمایی، برازش بهتری ارایه می‌دهد. بر همین اساس، پژوهشگران مختلف کلاس‌های جدیدی از توزیع‌ها را با اصلاحاتی بر توزیع لیندلی، همراه با ویژگی‌های ریاضی و کاربردهای گسترده، پیشنهاد کرده‌اند [3-6]. شانکر و همکارانش [7]، توزیع لیندلی دو پارامتری را برای مدل‌های طول عمر و بقا به‌صورت زیر تعریف کردند:

$$f\ z;\beta,\ \theta) = \frac{\beta^2}{\theta+\beta}\ 1+\theta z)e^{-\beta z}, \quad z,\ \alpha,\ \beta > 0. \qquad (۲)$$

قابل‌توجه است که اگر $\theta = 1$ باشد، توزیع لیندلی دو پارامتری به لیندلی یک پارامتری که در **رابطه (۱)** تعریف شده است، تبدیل می‌شود.

سعید هوفان [8]، نوع جدیدی از توزیع لیندلی با سه پارامتر را معرفی کرده است که به توزیع لیندلی توانی تعمیم‌یافته (*EPL*) معروف است .این توزیع، توسیعی از توزیع لیندلی توانی (*PL*) تعریف‌شده در **رابطه (۲)** با استفاده از تبدیل $X = Z^{1/\alpha}$ است که تابع چگالی احتمال آن به صورت

$$f_{EPL}\ x;\alpha,\ \beta,\ \theta) = \frac{\alpha\beta^2}{\theta+\beta}\ 1+\theta x^{\alpha})x^{\alpha-1}e^{-\beta x^{\alpha}}, Z,\ \alpha,\ \beta,\ \theta > 0, \qquad (۳)$$

و تابع توزیع تجمعی آن به‌صورت

$$F_{EPL}\ x;\alpha,\ \beta,\ \theta) = 1-\left(1+\frac{\beta\theta}{\theta+\beta}x^{\alpha}\right)e^{-\beta x^{\alpha}}, z,\ \alpha,\ \beta,\ \theta > 0, \qquad (۴)$$

است که در آن Z دارای تابع چگالی احتمال تعریف‌شده در **رابطه (۲)** است.

مدل *EPL* یک توزیع تلفیقی دو مولفه‌ای است که در آن یک مولفه دارای توزیع وایبول با پارامتر شکل α و پارامتر مقیاس β است. مولفه دیگر دارای توزیع گاما با پارامترهای α و β است. این دو مولفه با نسبت تلفیق $\frac{\beta}{\beta+\theta}$ ترکیب می‌شوند.

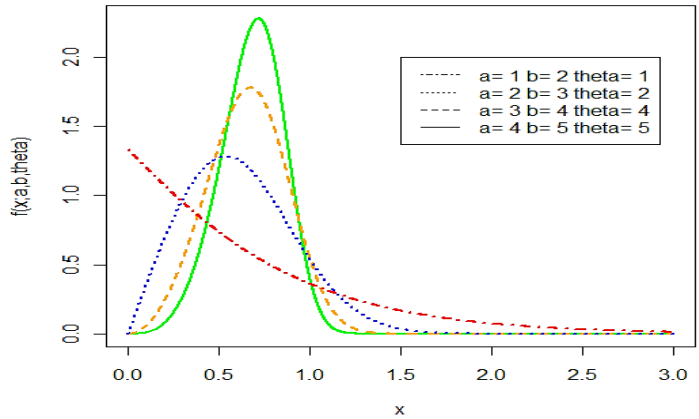
خواص ریاضی توزیع *EPL* شامل بررسی شکل‌های تابع چگالی احتمال، تابع نرخ خطر، گشتاورها، تابع مولد گشتاور و سایر اندازه‌های مرتبط است [8].

قیطانی و همکاران [9]، استنباط کلاسیک و مطالعات قابلیت اعتماد را برای پارامترهای توزیع لیندلی توانی(*PL*) در حالتی که $\theta = 1$ است، بررسی و معرفی کردند. آن‌ها برآورد کلاسیک این توزیع را در مدل تنش–مقاومت برای قابلیت اطمینان مطالعه نمودند. همچنین، مخدوم و همکارانش [10] ، پارامتر اعتمادپذیری این توزیع را از دیدگاه استنباط بیزی موردبررسی قراردادند. رفاه الطایبی و همکاران [11]، استنباط و کاربردهای توزیع وایبول توانی آلفا را تحت داده‌های سانسور هیبرید نوع دوم پیش‌رونده در مهندسی بررسی کردند. برآوردهای بیزی را تحت تابع زیان مربع خطا و لاینکس با استفاده از روش *MCMC* به‌دست آوردند. المطیری و همکاران [12]، برآوردهای بیزی و غیربیزی توزیع لیندلی توانی وارون ترانکیت شده را تحت داده‌های سانسور نوع دوم پیش‌رونده با توجه به توزیع پیشین ناآگاهی بخش به‌دست آورند.

در آزمایش‌های قابلیت اطمینان و تحلیل طول عمر، سانسور کردن روشی رایج برای مدیریت داده‌های ناقص است. در بسیاری از این آزمایش‌ها، داده‌های حاصل سانسور شده هستند. دو طرح سانسور متداول که در مطالعات قابلیت اطمینان به کار می‌روند، عبارت‌اند از:

سانسور نوع *I*: در این طرح، آزمایش در زمان از پیش تعیین‌شده T متوقف می‌شود. پس از زمان T، شکست‌های بعدی مشاهده نمی‌شوند.

سانسور نوع *II*: در این طرح، تعداد شکست‌ها تصادفی است. به‌عبارت‌دیگر، آزمایش تا زمانی ادامه می‌یابد که تعداد معینی R از بین n مولفه موجود دچار شکست شوند؛ بنابراین، زمان آزمایش متغیر تصادفی خواهد بود.



شکل ۱- نمودار تابع چگالی احتمال توزیع لیندلی توانی تعمیم‌یافته برای مقادیر متفاوت θ، β، α.

Figure1- Plots of the probability density function of the EPL distribution for different values of θ, β, α.

ترکیب طرح‌های سانسور نوع I و نوع II، به طرح سانسور هیبریدی (HCS) معروف است. کاندو و بالاکریشنان [13] مطالعه جامعی در مورد طرح سانسور هیبریدی و کاربردهای آن انجام داده‌اند. این طرح را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد:

فرض کنید n مولفه تحت شرایط یکسان در یک آزمایش طول عمر قرار می‌گیرند. طول عمر هر مولفه، متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع هستند. در طرح سانسور هیبریدی نوع I، آزمایش زمانی متوقف می‌شود که یکی از دو شرط زیر برآورده شود:

۱. تعداد از پیش تعیین‌شده R از بین n مولفه دچار شکست شوند.
۲. زمان آزمایش به مقدار از پیش تعیین‌شده T برسد.

طرح سانسور هیبریدی نوع I دارای یک نقص اساسی است؛ ممکن است تا زمان از پیش تعیین‌شده T، تنها تعداد کمی از شکست‌ها رخ دهد یا حتی هیچ شکستی ثبت نشود. به همین دلیل، چایلدز و همکارانش [14] طرح سانسور هیبریدی نوع II را پیشنهاد کردند. برخلاف طرح سانسور هیبریدی نوع I، در این طرح آزمایش زمانی متوقف می‌شود.

$$T^* = max\{x_{R:n}, T\},$$

که در آن

۱. T و R مقادیر از پیش تعیین‌شده هستند.
۲. $x_{R:n}$ زمانی است که شکست Rth در نمونه‌ای با اندازه n رخ می‌دهد.

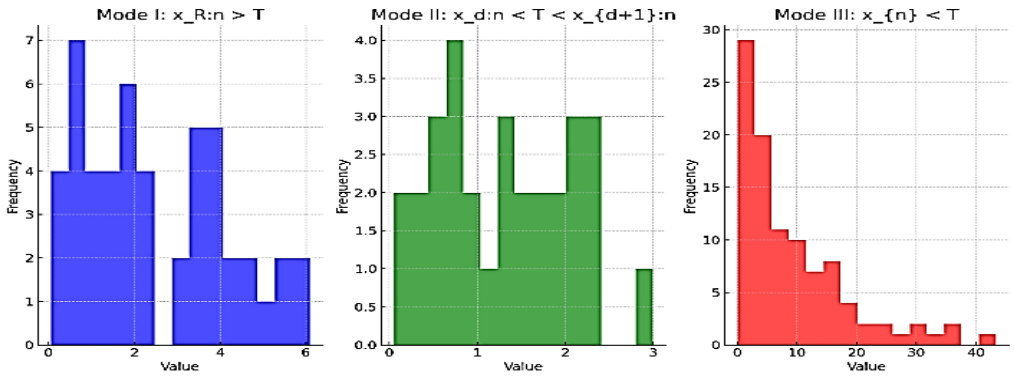
مزیت اصلی این طرح این است که حداقل R شکست در پایان آزمایش مشاهده خواهد شد. در این مدل، سه حالت مختلف ممکن است رخ دهد:

$$Model\ 1:\ \{x_{1:n} < \cdots < x_{R:n}\}\ \ if\ \ x_{R:n} > T,$$
$$Model\ 2:\ \{\ x_{1:n} < \cdots < x_{d:n} < T < x_{d+1:n}\}\ if\ \ R \le d < n \text{ و } x_{d:n} < T < x_{d+1:n},$$

$$Model\ 3:\ \{x_{1:n} < \cdots < x_{n:n}\}\ \ if\ \ x_{1:n} < \cdots < x_{n:n}.$$

زمان‌های شکست مرتب‌شده از مولفه‌های آزمایش را با $x_{1:n} < \cdots < x_{n:n}$ نشان می‌دهیم.

تا کنون، برآورد پارامترهای توزیع EPL تحت طرح سانسور هیبریدی نوع II، چه در چارچوب استنباط کلاسیک و چه استنباط بیزی، موردمطالعه قرار نگرفته است .هدف این مقاله ارایه برآورد بیزی برای پارامترهای توزیع لیندلی توانی تعمیم‌یافته (EPL) در حضور داده‌های سانسورشده هیبریدی نوع دوم است که با دو روش تقریب لیندلی و شبیه‌سازی مونت‌کارلو صورت می‌گیرد.



شکل ۲- مدل‌های سانسور هیبرید نوع دوم.

Figure 2- The Hybrid type-II censoring scheme.

ساختار مقاله بدین‌صورت می‌باشد. در بخش ۲، برآوردهای درستنمایی ماکسیمم (*MLE*) برای پارامترهای مجهول توزیع *EPL* تحت طرح سانسور هیبریدی نوع *II* ارایه شده و ماتریس اطلاع فیشر را به‌دست می‌آوریم. در بخش ۳، برآوردهای بیزی با استفاده از تقریب لیندلی و روش*MCMC* را بررسی نموده و آن‌ها با یکدیگر مقایسه می‌نماییم. در بخش ۴، نتایج تئوری را ارایه داده و در بخش ۵، یک مثال کاربردی با داده‌های واقعی را بررسی می‌کنیم و درنهایت در بخش ۶، بحث و نتیجه‌گیری را ارایه می‌دهیم.

۲- برآورد ماکسیمم درستنمایی

تابع درستنمایی زمان‌های شکست مشاهده‌شده در طرح سانسور هیبرید نوع *II* برای سه حالت مختلف به شرح زیر ارایه می‌شود.

تابع درستنمایی حالت اول:

$$l(\alpha,\beta,\theta) = \frac{n!}{(n-R)!}\prod_{i=1}^{R} f(x;\alpha,\beta,\theta)\left(1-F(x_{R:n})\right)^{n-R}. \qquad (۵)$$

تابع درستنمایی حالت دوم:

$$l(\alpha,\beta,\theta) = \frac{n!}{(n-d)!}\prod_{i=1}^{d} f(x;\alpha,\beta,\theta)\left(1-F(T)\right)^{n-d}. \qquad (۶)$$

تابع درستنمایی حالت سوم:

$$l(\alpha,\beta,\theta) = \frac{n!}{(n-d)!}\prod_{i=1}^{n} f(x;\alpha,\beta,\theta). \qquad (۷)$$

با ترکیب سه تابع درستنمایی در سه حالت مختلف، تابع درستنمایی کلی زمان‌های شکست مشاهده‌شده در طرح سانسور هیبریدی نوع *II* به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$l(\alpha,\beta,\theta) = \frac{n!}{(n-r)!}\prod_{i=1}^{r} f(x;\alpha,\beta,\theta)\;\left(1-F(c)\right)^{n-r}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}\{\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{\alpha\beta^2}{\beta+\theta}\right)(1+\theta x_i^{\alpha})x_i^{\alpha-1}e^{-\beta x_i^{\alpha}}\}\times\{1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\}\,e^{-\beta c^{\alpha}}\}^{n-r}, \qquad (۸)$$

که در آن c و r به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$r = \begin{cases} R, & caseI, \\ d, & caseII, \\ n, & caseIII. \end{cases}$$

$$c = \begin{cases} x_{R:n}, & caseI, \\ T, & case\ II, III. \end{cases}$$

بنابراین با چشم‌پوشی از ثابت‌ها، لگاریتم تابع درستنمایی می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود:

$$
\begin{aligned}
l(\alpha,\beta,\theta) &= r\ln\alpha + 2\ln\beta\, r\ln\beta - r\ln(\beta+\theta) + \sum_{i=1}^{r}\ln(1+\theta x_i^{\alpha}) + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{r}\ln x_i - \beta\sum_{i=1}^{r}x_i^{\alpha} \\
&\quad + (n-r)\ln\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\right) - (\beta(n-r)c^{\alpha}, \\
\frac{\partial l}{\partial\alpha} &= \frac{r}{\alpha} + \sum_{i=1}^{r}\frac{\theta x_i^{\alpha}\ln x_i}{1+\theta x_i^{\alpha})} + \sum_{i=1}^{r}\ln x_i - \beta\sum_{i=1}^{r}\ln x_i\ x_i^{\alpha}) + (n-r)\frac{\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\ln c}{1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}} - \beta(n-r)c^{\alpha}\ln c, \\
\frac{\partial l}{\partial\beta} &= \frac{2r}{\beta} - \frac{r}{\beta+\theta} - \sum_{i=1}^{r}x_i^{\alpha} + (n-r)\frac{\frac{\theta^2}{\beta+\theta)^2}c^{\alpha}}{1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}} - (n-r)c^{\alpha}, \\
\frac{\partial l}{\partial\theta} &= -\frac{r}{\beta+\theta} + \sum_{i=1}^{r}\frac{x_i^{\alpha}}{1+\theta x_i^{\alpha})} + (n-r)\frac{\frac{\beta^2}{\beta+\theta)^2}c^{\alpha}}{1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}}.
\end{aligned}
\qquad (۹)
$$

بر اساس معادلات نرمال فوق، برآوردهای ماکسیمم درستنمایی را نمی‌توان به‌طور ضمنی به دست آورد و این برآوردها فرم بسته ندارند. ازاین‌رو، برای برآورد پارامترها از الگوریتم *EM* استفاده می‌کنیم.

۱-۲- الگوریتم EM

بردار داده‌های سانسور شده Z را می‌توان مانند داده‌های گمشده در نظر گرفت؛ بنابراین، برای برآورد پارامترهای این مدل، ترجیح می‌دهیم که از الگوریتم *EM* استفاده کنیم. الگوریتم *EM* یک روش بسیار قدرتمند برای استنباط داده‌های ناقص است. در این الگوریتم پارامترها را به دو گروه تفکیک می‌کنیم. در مرحله اول برای پارامترهای گروه اول مقدارهایی به‌عنوان مقادیر اولیه (*Initial Values*) درنظر گرفته و بر اساس این پارامترها، مقدار پارامترهای گروه دوم را برآورد می‌کنیم .حال بر اساس پارامترهای گروه دوم و داده‌های مشاهده‌شده پارامترهای گروه اول را برآورد کرده و آن‌ها را بهبود می‌دهیم. این کار تا زمانی که الگوریتم به همگرایی برسد تکرار می‌شود. نتیجه نهایی از برآورد پارامترهای مدل در الگوریتم *EM*، تابع درستنمایی را به حداکثر مقدار خود می‌رساند. تی زانگ تسایی و همکاران [15] الگوریتم *EM* را برای توزیع آمیخته سانسور هیبرید نوع اول بررسی کردند. قبل از شروع، داده‌های مشاهده‌شده و سانسور شده را به ترتیب به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$X = (X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{r:n})$ و $Z = (Z_1, \dots, Z_{n-r})$ برای r داده شده، Z قابل‌مشاهده نیست و می‌توان آن را به‌عنوان داده گمشده در نظر گرفت؛ بنابراین، کل مجموعه داده‌ها را می‌توان با بردار $W = (X, Z)$ نمایش داد. در این مقاله، ما از روشی که کوندو و پرادان [16] برای بررسی داده‌های گمشده ارایه داده‌اند، استفاده می‌کنیم. فرض کنید لگاریتم تابع درستنمایی مجموعه داده‌های سانسور نشده، به‌صورت زیر باشد:

$$
\begin{aligned}
l_c(\alpha,\beta,\theta) &= r\ln\alpha + 2n\ln\beta - r\ln(\beta+\theta) + \sum_{i=1}^{r}\ln(1+\theta x_i^{\alpha}) + \sum_{i=1}^{n-r}\ln(1+\theta z_i^{\alpha}) + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{r}\ln x_i \\
&\quad + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n-r}\ln z_i - \beta\sum_{i=1}^{r}x_i^{\alpha} - \beta\sum_{i=1}^{n-r}z_i^{\alpha}.
\end{aligned}
\qquad (۱۰)
$$

مرحله E

در این مرحله انتظار، با استفاده از داده‌های مشاهده‌شده موجود از مجموعه داده، می‌توان مقادیر داده‌های ازدست‌رفته را تخمین زد یا حدس زد. در نهایت، پس‌ازاین مرحله، داده‌های کاملی را بدون مقادیر گمشده دریافت می‌کنیم.

محاسبه $Q(\theta\ |\ \theta^{(j)}) = E_{X|Y,\theta^{(j-1)}}[l_c(\theta; Y, X)]$ که امید ریاضی با توجه به داده‌های گمشده X به‌شرط داده‌های مشاهده Y گرفته می‌شود و باید توجه شود که مقدار $\theta^{(j-1)}$ در این امید ریاضی جایگزین می‌شود.

لگاریتم تابع درستنمایی شبه تصادفی به‌صورت زیراست:

$$\begin{aligned} l_s(\alpha,\beta,\theta) &= E[l_c(\alpha,\beta,\theta|x)] \\ &= r\ln\alpha + 2r\ln\beta - r\ln(\beta+\theta) + \sum_{i=1}^{r}\ln(1+\theta x_i^{\alpha}) + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{r}\ln x_i - \beta\sum_{i=1}^{r}x_i^{\alpha} \\ &+ (n-r)A(c;\alpha,\beta,\theta) + (n-r)(\alpha-1)B(c;\alpha,\beta,\theta) - \beta(n-r)D(c;\alpha,\beta,\theta). \end{aligned} \quad (11)$$

$$A(c;\alpha,\beta,\theta) = E[\ln(1+\theta Z^{\alpha})\,|Z>c].$$

$$B(c;\alpha,\beta,\theta) = E[\ln Z\,|Z>c].$$

$$D(c;\alpha,\beta,\theta) = E[Z^{\alpha}|Z>c].$$

مرحله M

حال باید از داده‌های کاملی که در مرحله انتظار تهیه شده است، استفاده کرده و پارامترها را به‌روز کنیم. در این مرحله، باید ماکسیمم تابع درستنمایی شبه تصادفی را محاسبه کنیم. اگر برآورد پارامترها در مرحله *kth* به‌صورت $(\hat{\alpha}_k,\beta_k,\theta_k)$ باشد می‌توان $(\hat{\alpha}_{k+1},\beta_{k+1},\theta_{k+1})$ را با ماکسیمم کردن تابع زیربه دست آورد:

$$\begin{aligned} l(\alpha,\beta,\theta) &= r\ln\alpha + 2n\ln\beta - r\ln(\beta+\theta) + \sum_{i=1}^{r}\ln(1+\theta x_i^{\alpha}) + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{r}\ln x_i \\ &- \beta\sum_{i=1}^{r}x_i^{\alpha} + (n-r)A\left(c;\hat{\alpha}_k,\beta_k,\theta_k\right) + (n-r)(\alpha-1)B\left(c;\hat{\alpha}_k,\beta_k,\theta_k\right) - \beta(n \\ &- r)D\left(c;\hat{\alpha}_k,\beta_k,\theta_k\right) \end{aligned} \quad (12)$$

در اینجا از قضیه زیر برای محاسبه A، B و D استفاده می‌کنیم:

قضیه ۱ - توزیع احتمال$Z_i(i=1,\dots,n-r)$ به‌شرط $X_{1)}=x_{(1)},\dots,X_{r)}=x_{(r)}$ برابر است با

$$f_{Z_i|X}\left(z_i\middle|X_{1)}=x_{1)},\dots,X_{r)}=x_{r)}\right) = f_{Z_i|X}\left(z_i\middle|X_{i)}=x_{i)}\right) = \frac{f_{EPL}(z_i)}{1-F_{EPL}(x_{i)})} = \frac{f_W(z_i|\alpha,\beta,\theta)}{1-F_W(c;\alpha,\beta,\theta)}$$

اثبات: مراجعه شود به [17].

با استفاده از **قضیه ۱**، A، B و D به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} A(c;\alpha,\beta,\theta) = E[\ln(1+\theta Z^{\alpha})\,|Z>c] &= \int_0^{\infty}\ln(1+\theta x^{\alpha})\frac{f_{EPL}\left(x|\alpha,\beta,\theta\right)}{1-F_{EPL}(c;\alpha,\beta,\theta)}dx \\ &= \int_c^{\infty}\ln(1+\theta x^{\alpha})\frac{\frac{\alpha\beta^2}{\beta+\theta}(1+\theta x^{\alpha})x^{\alpha-1}e^{-\beta x^{\alpha}}}{k}dx \\ &= \frac{\alpha\beta^2}{k(\beta+\theta)}\int_c^{\infty}\ln(1+\theta x^{\alpha})(1+\theta x^{\alpha})x^{\alpha-1}e^{-\beta x^{\alpha}}dx. \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} B(c;\alpha,\beta,\theta) = E[\ln Z\,|Z>c] &= \int_c^{\infty}\ln x\frac{f_{EPL}\left(x|\alpha,\beta,\theta\right)}{1-F_{EPL}(c;\alpha,\beta,\theta)}dx = \int_c^{\infty}\ln x\frac{\frac{\alpha\beta^2}{\beta+\theta}(1+\theta x^{\alpha})x^{\alpha-1}e^{-\beta x^{\alpha}}}{k}dx \\ &= \frac{\alpha\beta^2}{k(\beta+\theta)}\int_c^{\infty}\ln x(1+\theta x^{\alpha})x^{\alpha-1}e^{-\beta x^{\alpha}}dx. \end{aligned} \quad (14)$$

$$D\ c;\alpha,\beta,\theta) = E[Z^{\alpha}|Z > c] = \int_{c}^{\infty} x^{\alpha} \frac{f_{EPL}\left(x\middle|\alpha,\beta,\theta\right)}{1 - F_{EPL}\ c;\alpha,\beta,\theta)} dx = \int_{c}^{\infty} x^{\alpha} \frac{\frac{\alpha\beta^2}{\beta+\theta}\ 1+\theta x^{\alpha})x^{\alpha-1}e^{-\beta x^{\alpha}}}{k} dx$$
$$= \frac{\alpha\beta^2}{k\ \beta+\theta)} \int_{c}^{\infty} x^{\alpha}\ 1+\theta x^{\alpha})x^{\alpha-1}e^{-\beta x^{\alpha}}\ dx. \qquad (۱۵)$$

۳- ماتریس اطلاع فیشر

الگوریتم EM اندازه‌ای از اطلاعات داده‌های سانسورشده را مشابه اصل اطلاعات داده‌های گمشده که توسط لوئیس [18] ارایه شده است، فراهم می‌آورد. ماتریس اطلاعات فیشر را برای ساختن فواصل اطمینان مجانبی به‌کار می‌بریم. ایده‌ی اصل اطلاعات گمشده به‌صورت زیر بیان می‌شود [19]:

اطلاعات گمشده−اطلاعات کامل=اطلاعات مشاهده‌شده

فرض کنید که $\psi = (\alpha,\beta,\theta)$ و X بردار داده‌های مشاهده‌شده و W نشان‌دهنده داده‌های کامل باشد. در این صورت،اطلاعات مشاهده‌شده، اطلاعات گمشده و اطلاعات کامل را به ترتیب با$I_X(\psi)$، $I_W\ \psi)$ و$I_{W|X}\ \psi)$نشان می‌دهیم [20]؛ بنابراین

$$I_X\ \psi) = I_W\ \psi) - I_{W|X}\ \psi). \qquad (۱۶)$$

ماتریس اطلاع فیشر$I_W\ \psi)$ برابر است با

$$I_W\ \psi) = -E\left[\frac{\partial^2 l\ w;\psi)}{\partial\psi^2}\right], \qquad (۱۷)$$

و ماتریس اطلاع فیشر مشاهدات سانسورشده برابر است با

$$I_{W|X}\ \psi) = -\ n-r)E_{Z|X}\left[\frac{\partial^2 ln f_{Z|X}(z|x;\psi)}{\partial\psi^2}\right]. \qquad (۱۸)$$

برای مجموعه داده‌های کامل، اعضای ماتریس اطلاعات فیشر را همان‌طور که در گوپتا و کاندو [21] آمده است، به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$l\left(\alpha,\beta,\theta\right) = n\ln\alpha + 2\ n\ln\beta - n\ln(\beta+\theta) + \sum_{i=1}^{n} ln(1+x_i^{\alpha}) + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n} ln\ x_i - \beta\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}$$
$$\frac{\partial l}{\partial\alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\theta x_i^{\alpha} lnx}{(1+\theta x_i^{\alpha})} + \sum_{i=1}^{n} ln\ x_i - \beta\sum_{i=1}^{n} ln\ x_i\ (x_i^{\alpha})$$
$$\frac{\partial^2 l}{\partial\alpha^2} = \frac{-n}{\alpha^2} + \theta\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{\alpha}(lnx_i)^2}{(1+\theta x_i^{\alpha})^2} - \beta\sum_{i=1}^{n} (ln\ x_i)^2\ x_i^{\alpha}$$
$$\Longrightarrow -E\left(\frac{\partial^2 l}{\partial\alpha^2}\right) = \frac{n}{\alpha^2} - n\frac{\alpha\theta\beta^2}{\beta+\theta}\int_{0}^{\infty} \frac{(lnx)^2 x^{2\ \alpha-1}e^{-\beta x^{\alpha}}}{(1+\theta x^{\alpha})} dx + n\frac{\alpha\beta^3}{\beta+\theta}\int_{0}^{\infty} (lnx)^2 x^{2\ \alpha-1}e^{-\beta x^{\alpha}}\ dx$$
$$\frac{\partial l}{\partial\beta} = \frac{2\ N}{\beta} - \frac{n}{\beta+\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}$$
$$\frac{\partial^2 l}{\partial\beta^2} = -\frac{2\ n}{\beta^2} + \frac{n}{(\beta+\theta)^2}$$
$$\Rightarrow -E\left(\frac{\partial^2 l}{\partial\beta^2}\right) = \frac{2\ n}{\beta^2} - \frac{n}{(\beta+\theta)^2}$$
$$\frac{\partial l}{\partial\theta} = -\frac{n}{\beta+\theta} + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{\alpha}}{(1+\theta x_i^{\alpha})}$$
$$\Longrightarrow \frac{\partial^2 l}{\partial\theta^2} = \frac{n}{(\beta+\theta)^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i^{\alpha})^2}{(1+\theta x_i^{\alpha})^2}$$
$$-E\left(\frac{\partial^2 l}{\partial\theta^2}\right) = -\frac{n}{\beta+\theta)^2} + n\frac{\alpha\beta^2}{\beta+\theta)^3}\int_{0}^{\infty} \frac{x^{3\ \alpha-1}e^{-\beta x^{\alpha}}}{1+\theta x^{\alpha})} dx.$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial\alpha\partial\beta} = -\sum_{i=1}^{n} ln\, x_i\ \ x_i^{\alpha}),$$

$$\Longrightarrow\ -E\left(\frac{\partial^2 l}{\partial\alpha\partial\beta}\right) = n\frac{\alpha\beta^2}{\beta+\theta}\int_0^{\infty}(lnx)x^{2\,\alpha-1}(1+\theta x^{\alpha})e^{-\beta x^{\alpha}}\,dx$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial\alpha\partial\theta} = \frac{\partial^2 l}{\partial\theta\partial\alpha} = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{\alpha}(lnx_i)}{(1+\theta x_i^{\alpha})^2}$$

$$\Longrightarrow -E\left(\frac{\partial^2 l}{\partial\alpha\partial\theta}\right) = -E(\frac{\partial^2 l}{\partial\theta\partial\alpha}) = n\frac{\alpha\beta^2}{\beta+\theta}\int_0^{\infty}\frac{x^{2\,\alpha-1}(lnx)e^{-\beta x^{\alpha}}}{(1+\theta x^{\alpha})}dx$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial\beta\partial\theta} = \frac{\partial^2 l}{\partial\theta\partial\beta} = \frac{n}{(\beta+\theta)^2}$$

$$\Longrightarrow\ -E\left(\frac{\partial^2 l}{\partial\beta\partial\theta}\right) = -E(\frac{\partial^2 l}{\partial\theta\partial\beta}) = -\frac{n}{(\beta+\theta)^2}$$

$$l(z|x) = n-r)lnα + 2\,n-r)lnβ - \ n-r)\,ln\ \beta+\theta) + \sum_{i=1}^{n-r} ln\ 1+\theta z_i^{\alpha}) + \ \alpha-1)\sum_{i=1}^{n-r} ln\, z_i$$

$$-\beta\sum_{i=1}^{n-r} z_i^{\alpha} - \ n-r)\,ln\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\right) + \ n-r)\beta c^{\alpha}.$$

حال ماتریس اطلاعات فیشر برای مشاهدات سانسورشده طبق **معادله (۱۸)** و **قضیه ۱** به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{\partial l}{\partial\alpha} = \frac{n-r}{\alpha} + \sum_{i=1}^{n-r}\frac{\theta z_i^{\alpha} lnz_i}{(1+\theta z_i^{\alpha})} + \sum_{i=1}^{n-r} ln\, z_i - \beta\sum_{i=1}^{n-r} ln\, z_i\,(z_i^{\alpha}) - (n-r)\frac{\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}lnc}{1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}} + \beta(n$$

$$-r)c^{\alpha}lnc$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial\alpha^2} = \frac{-(n-r)}{\alpha^2} + \theta\sum_{i=1}^{n-r}\frac{(z_i^{\alpha})(lnz)^2}{(1+\theta x_i^{\alpha})^2} - \beta\sum_{i=1}^{n-r}(ln\, z_i)^2\, z_i^{\alpha} - (n-r)\frac{\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}(lnc)^2}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\right)^2} + \beta(n$$

$$-r)c^{\alpha}(lnc)^2$$

$$\Longrightarrow -E\left(\frac{\partial^2 l}{\partial\alpha^2}\right) = \frac{n-r}{\alpha^2} + (n-r)\frac{\alpha\beta^2\theta}{k(\beta+\theta)}h_{11} - (n-r)\frac{\alpha\beta^3}{k(\beta+\theta)}h_{11} - (n-r)\frac{\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}(lnc)^2}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\right)^2}$$

$$-\beta(n-r)c^{\alpha}(lnc)^2$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial\alpha\partial\beta} = -\sum_{i=1}^{n-r} ln\, z_i\,(z_i^{\alpha}) - \frac{(n-r)\frac{\theta^2}{(\beta+\theta)^2}c^{\alpha}lnc}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\right)^2} + (n-r)c^{\alpha}lnc$$

$$\Longrightarrow -E\left(\frac{\partial^2 l}{\partial\alpha\partial\beta}\right) = \frac{(n-r)\frac{\theta^2}{(\beta+\theta)^2}c^{\alpha}lnc}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\right)^2} + (n-r)c^{\alpha}lnc + (n-r)\frac{\alpha\beta^2}{k(\beta+\theta)}h_{12}$$

$$\Longrightarrow -E\left(\frac{\partial^2 l}{\partial\beta^2}\right) = \frac{2(n-r)}{\beta^2} - \frac{n-r}{(\beta+\theta)^2} + (n-r)\frac{\frac{2\theta^2}{(\beta+\theta)^3}\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\right)c^{\alpha} - \frac{\theta^4}{(\beta+\theta)^4}(c^{\alpha})^2}{(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha})^2}$$

$$\Longrightarrow -E\left(\frac{\partial^2 l}{\partial\theta^2}\right) = -\frac{n-r}{(\beta+\theta)^2} + (n-r)\frac{\frac{2\beta^2}{(\beta+\theta)^3}\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\right)c^{\alpha}}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\right)^2} - (n-r)\frac{\alpha\beta^2}{k(\beta+\theta)}h_{33}$$

$$\Longrightarrow -E\left(\frac{\partial^2 l}{\partial\alpha\partial\theta}\right)=(n-r)\frac{\frac{\beta^2}{(\beta+\theta)^2}c^{\alpha}lnc}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\right)^2}+(n-r)\frac{\alpha\beta^2}{k(\beta+\theta)}h_{13}$$

$$\Longrightarrow -E\left(\frac{\partial^2 l}{\partial\beta\partial\theta}\right)=-\frac{n-r}{\beta+\theta)^2}+\ n-r)\frac{\frac{2\ \theta\beta}{\beta+\theta)^3}\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\right)c^{\alpha}-\frac{\beta^2\theta^2}{\beta+\theta)^4}c^{2\ \alpha}}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\right)^2},$$

$$h_{11}=\int_c^{\infty}\frac{z^{2\ \alpha-1}(lnz)^2e^{-\beta z^{\alpha}}}{(1+\theta z^{\alpha})}dz,$$

$$h_{12}=\int_c^{\infty}(lnz)^2z^{2\ \alpha-1}(1+\theta z^{\alpha})e^{-\beta z^{\alpha}}\ dz,$$

$$h_{13}=\int_c^{\infty}\frac{z^{2\ \alpha-1}(lnz)e^{-\beta z^{\alpha}}}{(1+\theta z^{\alpha})}dz,$$

$$h_{33}=\int_c^{\infty}\frac{z^{3\ \alpha-1}e^{-\beta z^{\alpha}}}{(1+\theta z^{\alpha})}dz.$$

با معکوس کردن $I_X(\theta)$، ماتریس کوواریانس واریانس مجانبی برایθ به دست می‌آید و از آن می‌توان برای محاسبه فواصل اطمینان مجانبی پارامترها استفاده کرد.

۴- برآورد بیز پارامترها

در این بخش، برآوردهای بیز پارامترهای α، β، θ را تحت تابع زیان مربع خطای متقارن محاسبه می‌کنیم. تابع زیان مربع خطا به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L_s\big(f(\omega)وf(\omega)\big)=\big(f(\omega)-f(\omega)\big)^2. \qquad (۱۹)$$

($f\ \omega$) برآورد ($f\ \omega$) است و $f(\omega)$ تابعی از ω است.

فرض کنید $x=(x_{1:n},\dots,x_{r:n})$ یک نمونه مشاهده‌شده از طرح سانسور هیبرید (*HCS*) نوع *II* باشد که از توزیع $EPL(\alpha،\beta،\theta)$ پیروی می‌کند. با توجه به توابع درستنمایی و لگاریتم درستنمایی داده‌شده در **معادله‌های (۸)** و **(۹)**، و با فرض اینکه پارامترهای $\theta،\beta،\alpha$ دارای توزیع‌های پیشین مستقل گاما باشند، توزیع‌های پیشین آن‌ها به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned}&\pi_1\ \alpha)\propto\alpha^{w_2-1}e^{-\alpha w_1},\qquad \alpha>0,\\&\pi_2\ \beta)\propto\beta^{w_4-1}e^{-\beta w_3},\qquad \beta>0,\\&\pi_3\ \theta)\propto\theta^{w_6-1}e^{-\theta w_5},\qquad \theta>0.\end{aligned} \qquad (۱۹)$$

بنابراین توزیع پیشین توام آن‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}&\pi\big(\alpha,\beta,\theta\big)\propto\alpha^{w_2-1}e^{-\alpha w_1}\beta^{w_4-1}e^{-\beta w_3}\theta^{w_6-1}e^{-\theta w_5}\ \ \alpha,\beta,\theta>0\ \ w>0,i=1,\dots,6.\\&L\ \alpha،\beta،\theta;x)\propto\ \frac{\alpha^r\beta^{2\ r}}{\beta+\theta)^r}\prod_{i=1}^{r}1+\theta x_i^{\alpha})\prod_{i=1}^{r}x_i^{\alpha-1}\ e^{-\beta\sum_{i=1}^{r}x_i^{\alpha}}\left\{1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}e^{-\beta c^{\alpha}}\right\}^{n-r}\\&\Rightarrow\pi\big(\alpha،\beta،\theta|x\big)=k\frac{\alpha^{r+w_2-1}\beta^{2\ r+w_4-1}\theta^{w_6-1}}{\big(\beta+\theta\big)^r}\prod_{i=1}^{r}(1+\theta x_i^{\alpha})\prod_{i=1}^{r}x_i^{\alpha-1}\left\{1\right.\\&\left.+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}e^{-\beta c^{\alpha}}\right\}^{n-r}\ e^{-\beta(\sum_{i=1}^{r}x_i^{\alpha}+w_3)-w_1\alpha-w_5\theta},\end{aligned} \qquad (۲۰)$$

که در آن k مقداری ثابت است. امید ریاضی توابع چگالی حاشیه‌ای نسبت به هر یک از پارامترها، تحت تابع زیان مربع خطا، همان برآوردهای بیزی آن‌ها هستند؛ بنابراین، برآوردهای بیزی پارامترهای $\theta،\beta،\alpha$ به ترتیب برابرند با

$$\widehat{\alpha}_S = k\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\alpha^{r+w_2-1}\beta^{2r+w_4-1}\theta^{w_6-1}}{\beta+\theta)^r}\prod_{i=1}^{r}1+\theta x_i^{\alpha})\prod_{i=1}^{r}x_i^{\alpha-1}\left\{1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}e^{-\beta c^{\alpha}}\right\}^{n-r} e^{-\beta\left(\sum_{i=1}^{r}x_i^{\alpha}+w_3\right)-w_1\alpha-w_5\theta}\,d\alpha d\beta d\theta\,\beta_S$$
$$= k\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\alpha^{r+w_2-1}\beta^{2r+w_4}\theta^{w_6-1}}{\beta+\theta)^r}\prod_{i=1}^{r}1+\theta x_i^{\alpha})\prod_{i=1}^{r}x_i^{\alpha-1}\left\{1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}e^{-\beta c^{\alpha}}\right\}^{n-r} e^{-\beta\left(\sum_{i=1}^{r}x_i^{\alpha}+w_3\right)-w_1\alpha-w_5\theta}\,d\alpha d\beta d\theta, \qquad (۲۲)$$

$$\theta_S = k\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\alpha^{r+w_2-1}\beta^{2r+w_4-1}\theta^{w_6}}{(\beta+\theta)^r}\prod_{i=1}^{r}(1+\theta x_i^{\alpha})\prod_{i=1}^{r}x_i^{\alpha-1}\left\{1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}e^{-\beta c^{\alpha}}\right\}^{n-r} e^{-\beta(\sum_{i=1}^{r}x_i^{\alpha}+w_3)-w_1\alpha-w_5\theta}\,d\alpha d\beta d\theta.$$

حل این معادلات به روش‌های غیرعددی ناممکن است؛ بنابراین از روش‌های عددی استفاده می‌شود.

۱-۴- تقریب لیندلی

لیندلی [22] یک راه‌حل مجانبی برای محاسبه نسبت دو انتگرال در روش بیزی ارایه داد. بسیاری از پژوهشگران از تقریب لیندلی برای به دست آوردن برآوردهای بیزی در توزیع‌های مختلف طول عمر استفاده کرده‌اند [23], [24].

نسبت دو انتگرال را می‌توان با استفاده از تحلیل بیزی به‌صورت زیر محاسبه کرد:

$$I\ x) \approx E\left(U\ \Theta|x)\right) = \frac{\int u\ \Theta) exp\left\{l\ \Theta) + \rho\ \Theta)\right\}d\Theta}{\int exp\left\{l\ \Theta) + \rho\ \Theta)\right\}d\Theta}. \qquad (۲۳)$$

$\Theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m)$ و $u\ \Theta)$ تابعی از θ ، $l\ \Theta)$ لگاریتم تابع درستنمایی و $\rho\ \Theta)$ لگاریتم چگالی پیشین توام Θ است.

سلطان و همکاران [25] نشان داده‌اند که برای نمونه‌های با اندازه‌ی کافی بزرگ، تحت شرایط نظم، می‌توان بسط مرتبه‌ی بالا را به‌صورت زیر تقریب زد:

$$I\ x) \approx u + {}^1/_2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left(u_{ij} + 2u_{ij}\rho_j\right)\sigma_{ij} + {}^1/_2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}l_{ijk}\,u_l\sigma_{ij}\sigma_{kl}, \qquad (۲۴)$$

که در آن $u\ \Theta)$ تنها تابعی از (α,β,θ) است و $l(\alpha,\beta,\theta)$ لگاریتم-درستنمایی و $\rho(\alpha,\beta,\theta)$ لگاریتم $\pi(\alpha,\beta,\theta)$ است .

فرض کنید $(\widehat{\alpha},\beta,\theta)$ نشان‌دهنده برآوردهای ماکسیمم درستنمایی (α,β,θ) باشند. برای نمونه‌ای با اندازه‌ی کافی بزرگ و حجم n، با استفاده از روشی که لیندلی در [26] ارایه داده است، نسبت **انتگرال (۲۳)** را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$I\ x) \approx u\left(\widehat{\alpha},\beta,\theta\right) + {}^1/_2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left(u_{ij} + 2u_{ij}\rho_j\right)\sigma_{ij} + {}^1/_2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}l_{ijk}\,u_l\sigma_{ij}\sigma_{kl}, \qquad (۲۵)$$

که در آن $u_{\alpha\alpha}$ مشتق دوم تابع $u(\alpha,\beta,\theta)$ نسبت به α است و $\widehat{u}_{\alpha\alpha}$ نشان‌دهنده همان عبارت با توجه به $\alpha = \widehat{\alpha}$ و $\beta = \widehat{\beta}$ و $\theta = \widehat{\theta}$ است. همه کمیت‌هایی که در $I\ x)$ نشان دادیم در زیر محاسبه می‌شوند:

$$l(\alpha,\beta,\theta) = rln\alpha + 2\,rln\beta - rln(\beta+\theta) + \sum_{i=1}^{r}1+\theta x_i^{\alpha}) + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{r}lnx_i \qquad (۲۶)$$

$$-\beta\sum_{i=1}^{r}x_i^{\alpha}+\ n-r)\,ln\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\right)-\beta\ n-r)c^{\alpha},$$

$$\hat{I}_{\alpha\alpha}=-\frac{r}{\alpha^2}+\sum_{i=1}^{r}\frac{\theta x_i^{\alpha}(lnx_i)^2}{1+\theta x_i^{\alpha})^2}-\beta\sum_{i=1}^{r}x_i^{\alpha}(lnx_i)^2-\beta(n-r)(lnc)^2c^{\alpha}+\ n-r)\frac{\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}\ lnc)^2c^{\alpha}}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\right)^2},$$

و بنابراین $\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}=\frac{-1}{\hat{I}_{\alpha\alpha}}$.

$$\hat{I}_{\beta\beta}=-\frac{2\,r}{\beta^2}+\frac{r}{\beta+\theta)^2}+\ n-r)\frac{-2\frac{\theta^2c^{\alpha}}{\beta+\theta)^3}\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\right)-\left(\frac{\theta^2}{\beta+\theta)^2}c^{\alpha}\right)^2}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\right)^2},$$

$$\Longrightarrow\ \hat{\sigma}_{\beta\beta}=\frac{-1}{\hat{I}_{\beta\beta}}$$

$$\hat{I}_{\alpha\beta}=-\sum_{i=1}^{r}x_i^{\alpha}lnx_i-\ n-r)c^{\alpha}lnc+\ n-r)\frac{\frac{\theta^2}{\beta+\theta)^2}c^{\alpha}lnc}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\right)^2},$$

$$\Longrightarrow\ \hat{\sigma}_{\alpha\beta}=\frac{-1}{\hat{I}_{\alpha\beta}},$$

$$\hat{I}_{\beta\alpha}=-\sum_{i=1}^{r}x_i^{\alpha}lnx_i-\ n-r)c^{\alpha}lnc+\ n-r)\frac{\frac{\theta^2}{\beta+\theta)^2}c^{\alpha}lnc}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\right)^2},$$

$$\Longrightarrow\hat{\sigma}_{\beta\alpha}=\frac{-1}{\hat{I}_{\beta\alpha}},$$

$$\hat{I}_{\alpha\theta}=\sum_{i=1}^{r}\frac{x_i^{\alpha}lnx_i}{(1+\theta x_i^{\alpha})^2}+\ n-r)\frac{\frac{\beta^2}{\beta+\theta)^2}c^{\alpha}lnc}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\right)^2},$$

$$\Longrightarrow\hat{\sigma}_{\alpha\theta}=\frac{-1}{\hat{I}_{\alpha\theta}},$$

$$\hat{I}_{\theta\beta}=\frac{r}{(\beta+\theta)^2}+\ n-r)\frac{\frac{\beta^2\theta}{\beta+\theta)^3}c^{\alpha}\left(2+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\right)}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\right)^2},$$

$$\Longrightarrow\ \hat{\sigma}_{\beta\theta}=\frac{-1}{\hat{I}_{\beta\theta}},$$

$$\hat{I}_{\theta\theta}=\frac{r}{(\beta+\theta)^2}-\sum_{i=1}^{r}\frac{x_i^{\alpha})^2}{1+\theta x_i^{\alpha})^2}-\ n-r)\frac{\frac{2\beta^2}{\beta+\theta)^3}c^{\alpha}+\frac{2\beta^3\theta}{\beta+\theta)^4}(c^{\alpha})^2+\frac{\beta^4}{\beta+\theta)^4}(c^{\alpha})^2}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\right)^2},$$

$$\Longrightarrow\hat{\sigma}_{\theta\theta}=\frac{-1}{\hat{I}_{\theta\theta}},$$

$$\hat{I}_{\theta\alpha}=\sum_{i=1}^{r}\frac{x_i^{\alpha}lnx_i}{(1+\theta x_i^{\alpha})^2}+\ n-r)\frac{\frac{\beta^2}{\beta+\theta)^2}c^{\alpha}lnc}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\right)^2}\ \Longrightarrow\ \hat{\sigma}_{\theta\alpha}=\frac{-1}{\hat{I}_{\theta\alpha}},$$

$$\widehat{I}_{\theta\beta} = \frac{r}{(\beta+\theta)^2} + \ n-r)\frac{\frac{2\,\beta\theta}{\beta+\theta)^3}c^{\alpha} + \frac{\beta\theta)^2}{\beta+\theta)^4}(c^{\alpha})^2}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\right)^2},$$

$$\Rightarrow \ \widehat{\sigma}_{\theta\beta} = \frac{-1}{\widehat{I}_{\theta\beta}},$$

$$\widehat{I}_{\alpha\alpha\alpha} = \frac{r}{\alpha^2} + \sum_{i=1}^{r}\frac{\theta x_i^{\alpha}(lnx_i)^3(1-\theta x_i^{\alpha})}{(1+\theta x_i^{\alpha})^3} - \beta\sum_{i=1}^{r}x_i^{\alpha}(lnx_i)^3 - \beta\ n-r)\ lnc)^3c^{\alpha}$$
$$+\ n-r)\frac{\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}\ lnc)^3c^{\alpha}\left(1-\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\right)}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\right)^3},$$

$$\widehat{I}_{\alpha\beta\alpha} = -\sum_{i=1}^{r}x_i^{\alpha}(lnx_i)^2 - \ n-r)c^{\alpha}\ lnc)^2$$
$$+\ n-r)\frac{\frac{\theta^2}{\beta+\theta)^2}c^{\alpha}\ lnc)^2 + \frac{\theta^3\beta^2}{\beta+\theta)^3}\ c^{\alpha})^2\ \ lnc)^2 - \frac{2\,\beta\theta^3}{\beta+\theta)^3}\ c^{\alpha})^2\ \ lnc)^2}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\right)^3},$$

$$\widehat{I}_{\alpha\theta\alpha} = \sum_{i=1}^{r}\frac{x_i^{\alpha}(lnx_i)^2(1-\theta x_i^{\alpha})}{(1+\theta x_i^{\alpha})^3} - \ n-r)\frac{\frac{\beta^2}{\beta+\theta)^2}c^{\alpha}\ lnc)^2}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\right)^3},$$

$$\widehat{I}_{\beta\alpha\alpha} = -\sum_{i=1}^{r}x_i^{\alpha}(lnx_i)^2 - \ n-r)c^{\alpha}\ lnc)^2 + \ n-r)\frac{\frac{\theta^2}{\beta+\theta)^2}c^{\alpha}\ lnc)^2\left(1-\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\right)}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\right)^3},$$

$$\widehat{I}_{\beta\beta\alpha} = \ n-r)\frac{-2\frac{\theta^2c^{\alpha}lnc}{\beta+\theta)^3} - 2\frac{\theta^3(c^{\alpha})^2lnc\ \theta+3\ \beta)}{\beta+\theta)^4} - 6\frac{\theta^4\beta^2\ c^{\alpha})^3lnc}{\beta+\theta)^5}}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\right)^4},$$

$$\widehat{I}_{\beta\theta\alpha} = 2\ n-r)\frac{\frac{\beta\theta c^{\alpha}lnc}{\beta+\theta)^3} + \frac{\theta^2\beta^2(c^{\alpha})^2lnc}{\beta+\theta)^4} - \frac{\theta^3\beta^3\ c^{\alpha})^3lnc}{\beta+\theta)^5}}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\right)^4},$$

$$\widehat{I}_{\theta\alpha\alpha} = \sum_{i=1}^{r}\frac{x_i^{\alpha}(lnx_i)^2(1-\theta x_i^{\alpha})}{(1+\theta x_i^{\alpha})^3} + \ n-r)\frac{\frac{\beta^2}{\beta+\theta)^2}c^{\alpha}\ lnc)^2 - \frac{\beta^3\theta}{\beta+\theta)^3}\ c^{\alpha})^2\ lnc)^2}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\right)^3},$$

$$\widehat{I}_{\theta\beta\alpha} = \ n-r)\frac{\frac{2\,\beta\theta}{\beta+\theta)^3}c^{\alpha}lnc}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\right)^3},$$

$$\widehat{I}_{\theta\theta\alpha} = -2\sum_{i=1}^{r}\frac{(x_i^{\alpha})^2lnx_i(1-\theta x_i^{\alpha})}{(1+\theta x_i^{\alpha})^3} - 2(n$$
$$-r)\frac{\frac{\beta^2}{(\beta+\theta)^3}c^{\alpha}lnc - \frac{2\beta^3\theta}{(\beta+\theta)^4}(c^{\alpha})^2lnc - \frac{\beta^4}{(\beta+\theta)^5}(c^{\alpha})^2lnc}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\right)^3},$$

$$\widehat{I}_{\alpha\alpha\beta} = -\sum_{i=1}^{r}x_i^{\alpha}(lnx_i)^2 - (n-r)(lnc)^2c^{\alpha} - \ n-r)\frac{\frac{\theta^2}{\beta+\theta)^2}\ lnc)^2c^{\alpha} - \frac{\beta\theta^3}{\beta+\theta)^3}\ lnc)^2\ c^{\alpha})^2}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\right)^3},$$

$$\widehat{I}_{\alpha\beta\beta} = -2\ n-r)\frac{\frac{\theta^2}{\beta+\theta)^3}c^\alpha lnc - \frac{\theta^3(c^\alpha)^2 lnc}{\beta+\theta)^3}}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^\alpha\right)^3},$$

$$\widehat{I}_{\alpha\theta\beta} = \ n-r)\frac{\frac{2\ \beta\theta}{\beta+\theta)^3}c^\alpha lnc + \frac{2\beta^2\theta^2}{\beta+\theta)^4}(c^\alpha)^2 lnc - \frac{\beta^2\theta^2}{\beta+\theta)^3}(c^\alpha)^2 lnc}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^\alpha\right)^3},$$

$$\widehat{I}_{\beta\alpha\beta} = -2\ n-r)\frac{\frac{\theta^2}{\beta+\theta)^3}c^\alpha lnc + \frac{\beta\theta^3}{\beta+\theta)^3}\ c^\alpha)^2 lnc + \frac{\theta^4}{\beta+\theta)^4}\ c^\alpha)^2 lnc}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^\alpha\right)^3},$$

$$\widehat{I}_{\beta\beta\beta} = \frac{4\ r}{\beta^3} - \frac{2\ r}{(\beta+\theta)^3} +$$

$$n-r)\frac{\frac{4\beta^3(c^\alpha)^2}{\beta+\theta)^3}\ 1+2\ \beta) + \frac{6\theta^2}{\beta+\theta)^4}c^\alpha - \frac{4\theta^2}{\beta+\theta)^5}(c^\alpha)^2 + \frac{4\theta^4\beta(c^\alpha)^3\ 1-\beta) + 4\theta^3(c^\alpha)^2\ 2\theta^3c^\alpha - 1) - 6\theta^5\beta(c^\alpha)^3}{\beta+\theta)^6} - \frac{4\theta^4\beta(c^\alpha)^3}{\beta+\theta)^7}}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^\alpha\right)^3}$$

$$\widehat{I}_{\beta\theta\beta}$$

$$= \frac{-2\ r}{(\beta+\theta)^3}$$

$$+\ \ n-r)\frac{\left(\frac{4\ \beta\theta^2c^\alpha - 2\beta^2\theta c^\alpha + 2\beta^2\theta^3(c^\alpha)^2}{\beta+\theta)^4} - \frac{\beta^2\theta^2(c^\alpha)^2\ \beta-\theta)}{\beta+\theta)^5}\right)\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^\alpha\right) - (\frac{2\ \beta^2\theta^3(c^\alpha)^2}{\beta+\theta)^5} + \frac{\beta^3\theta^4(c^\alpha)^3}{\beta+\theta)^6}}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^\alpha\right)^3},$$

$$\widehat{I}_{\theta\alpha\beta} = \ n-r)\frac{\frac{2\ \beta\theta c^\alpha lnc}{\beta+\theta)^3} - \frac{2\beta^3\theta^2\ c^\alpha)^3 lnc}{\beta+\theta)^5}}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^\alpha\right)^3},$$

$$\widehat{I}_{\theta\beta\beta} = \frac{-2\ r}{(\beta+\theta)^3} + \ n-r)\frac{\frac{2\theta^2-4\ \beta\theta)}{\beta+\theta)^4}c^\alpha + \frac{2\ \beta\theta^3 - 2\beta^2\theta^2 - 4\beta^2\theta}{\beta+\theta)^5}(c^\alpha)^2 - \frac{2\beta^3\theta^3}{\beta+\theta)^6}(c^\alpha)^2}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^\alpha\right)^3},$$

$$\widehat{I}_{\theta\theta\beta}$$

$$= \frac{-2\ r}{(\beta+\theta)^3}$$

$$-\ \ n$$

$$-\ r)\frac{\frac{4\ \beta\theta - 2\beta^2)}{\beta+\theta)^4}c^\alpha - \frac{2\beta^3\theta}{\beta+\theta)^5}(c^\alpha)^2 + \frac{(6\ \beta^3 + 6\beta^2\theta - 4\beta^3\theta)(c^\alpha)^2 + (6\ \beta^4\theta + 6\beta^3\theta^2 - 6\beta^4\theta^2 - 4\beta^3\theta^3)(c^\alpha)^3}{\beta+\theta)^6}}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^\alpha\right)^3},$$

$$\widehat{I}_{\alpha\alpha\theta} = \sum_{i=1}^{r}\frac{x_i^\alpha(lnx_i)^2(1-\theta x_i^\alpha)}{(1+\theta x_i^\alpha)^2} + \ n-r)\frac{\frac{\theta^2}{\beta+\theta)^2}\ lnc)^2c^\alpha - \frac{\beta\theta\ \beta-\theta)}{\beta+\theta)^2}\ lnc)^2\ c^\alpha)^2}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^\alpha\right)^3},$$

$$\widehat{I}_{\alpha\beta\theta} = \ n-r)\frac{\frac{2\ \beta\theta}{\beta+\theta}c^\alpha lnc + \frac{2\beta^2\theta^2}{\beta+\theta)^2}\ c^\alpha)^2 lnc - \frac{2\beta^2\theta^2}{\beta+\theta)^4}c^\alpha lnc}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^\alpha\right)^3},$$

$$\widehat{I}_{\alpha\theta\theta} = -2\sum_{i=1}^{r}\frac{x_i^\alpha)^2 lnx_i}{1+\theta x_i^\alpha)^3} - 2\ n-r)\frac{\frac{\beta^2}{\beta+\theta)^3}c^\alpha lnc + \frac{\beta^3}{\beta+\theta)^3}(c^\alpha)^2 lnc}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^\alpha\right)^3},$$

$$\widehat{I}_{\beta\alpha\theta} = \ n-r)\frac{\frac{2\ \beta\theta}{\beta+\theta)^3}c^\alpha lnc}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^\alpha\right)^3},$$

$$\hat{I}_{\beta\theta\theta}=\frac{-2\,r}{(\beta+\theta)^3}+\ n-r)\frac{\frac{2\,\beta\ \beta-2\ \theta)}{\beta+\theta)^4}c^{\alpha}+\frac{2\beta^2\theta\ \beta-\theta-2\ \beta\theta)}{\beta+\theta)^5}\ c^{\alpha})^2}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\right)^3},$$

$$\hat{I}_{\theta\alpha\theta}=-2\sum_{i=1}^{r}\frac{x_i^{\alpha}(lnx_i)^2}{1+\theta x_i^{\alpha})^3}-\ n-r)\frac{\frac{2\beta^2c^{\alpha}lnc+\beta^4\ c^{\alpha})^2lnc}{\beta+\theta)^4}+\frac{2\beta^3\theta\ c^{\alpha})^2lnc}{\beta+\theta)^5}}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\right)^3},$$

$$\hat{I}_{\theta\beta\theta}=\frac{-2\,r}{(\beta+\theta)^3}+\ n-r)\frac{\frac{2\,\beta\ \beta-2\ \theta)}{\beta+\theta)^4}c^{\alpha}+\frac{2\beta^2\theta\ 2\,\beta-3\ \theta)}{\beta+\theta)^5}(c^{\alpha})^2+\frac{2\beta^3\theta^2\ \beta-\theta)}{\beta+\theta)^6}(c^{\alpha})^3}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\right)^3},$$

$$\hat{I}_{\theta\theta\theta}=\frac{-2\,r}{(\beta+\theta)^3}+2\sum_{i=1}^{r}\frac{(x_i^{\alpha})^3}{(1+\theta x_i^{\alpha})^3}$$
$$-\ n$$
$$-r)\frac{\frac{-6\beta^2}{\beta+\theta)^4}c^{\alpha}-\frac{4\beta^3\ 3\ \theta-\beta)}{\beta+\theta)^5}(c^{\alpha})^2+\frac{\beta^4\ 2-\beta^2)-6\beta^2\theta\ \theta-\beta^3)}{\beta+\theta)^6}(c^{\alpha})^3}{\left(1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}\right)^3},$$

و با توجه به

$$\pi\left(\alpha.\beta.\ \theta\right)\propto\alpha^{w_2-1}e^{-\alpha w_1}\beta^{w_4-1}e^{-\beta w_3}\theta^{w_6-1}e^{-\theta w_5},$$
$$ln\pi(\alpha.\beta.\ \theta)\propto(w_2-1)ln\alpha+(w_4-1)ln\beta+(w_6-1)ln\theta-\alpha w_1-\beta w_3-\theta w_5,$$
$$\widehat{\rho}\ (\alpha.\beta.\ \theta)=(w_2-1)ln\hat{\alpha}+(w_4-1)ln\beta+(w_6-1)ln\theta-\hat{\alpha}w_1-\beta w_3-\theta w_5,$$
$$\widehat{\rho}_{\ \alpha}=\frac{w_2-1}{\alpha}-w_1,$$
$$\widehat{\rho}_{\ \beta}=\frac{w_4-1}{\beta}-w_3,$$
$$\widehat{\rho}_{\ \alpha}=\frac{w_6-1}{\theta}-w_5.$$

بنابراین برآوردهای بیز $\alpha.\beta.\ \theta$ تحت تابع زیان مربع خطا برابرند با

$$U\ \alpha.\beta.\ \theta)=\alpha,$$
$$U_{\alpha}=1\Rightarrow\ U_{\alpha\alpha}=U_{\beta}=U_{\theta}=U_{\beta\beta}=U_{\theta\theta}=U_{\alpha\beta}=U_{\alpha\theta}=U_{\beta\alpha}=U_{\theta\alpha}=0,$$
$$I(X)=E(\alpha|D)=\hat{\alpha}+[\left(\frac{w_2-1}{\alpha}-w_1\right)\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}+\left(\frac{w_4-1}{\beta}-w_3\right)\hat{\sigma}_{\alpha\beta}+\left(\frac{w_6-1}{\theta}-w_5\right)\hat{\sigma}_{\beta\theta}$$
$$+\ {}^1\!/_2\left[\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}\ I)+\hat{\sigma}_{\beta\alpha}\ II)+\hat{\sigma}_{\theta\alpha}\ III)\right].\qquad(۲۷)$$

$$U\ \alpha.\beta.\ \theta)=\beta,$$
$$U_{\beta}=1\Rightarrow U_{\beta\beta}=U_{\alpha}=U_{\theta}=U_{\alpha\alpha}=U_{\theta\theta}=U_{\alpha\beta}=U_{\alpha\theta}=U_{\beta\alpha}=U_{\theta\alpha}=U_{\theta\beta}=U_{\theta\beta}=0,$$
$$I(X)=E(\beta|D)=\beta+[\left(\frac{w_2-1}{\alpha}-w_1\right)\hat{\sigma}_{\beta\alpha}+\left(\frac{w_4-1}{\beta}-w_3\right)\hat{\sigma}_{\beta\beta}+\left(\frac{w_6-1}{\theta}-w_5\right)\hat{\sigma}_{\beta\theta}$$
$$+\ {}^1\!/_2\left[\hat{\sigma}_{\alpha\beta}\ I)+\hat{\sigma}_{\beta\beta}\ II)+\hat{\sigma}_{\theta\beta}\ III)\right].\qquad(۲۸)$$

$$U(\alpha.\beta.\ \theta)=\theta$$
$$U_{\theta}=1\Rightarrow U_{\theta\theta}=U_{\theta\alpha}=U_{\theta\beta}=U_{\alpha\alpha}=U_{\beta}=U_{\alpha}=U_{\beta\beta}=U_{\alpha\beta}=U_{\beta\alpha}=U_{\alpha\theta}=U_{\beta\theta}=0,$$
$$I(X)=E(\theta|D)=\theta+[\left(\frac{w_2-1}{\alpha}-w_1\right)\hat{\sigma}_{\theta\alpha}+\left(\frac{w_4-1}{\beta}-w_3\right)\hat{\sigma}_{\theta\beta}+\left(\frac{w_6-1}{\theta}-w_5\right)\hat{\sigma}_{\theta\theta}$$
$$+\ {}^1\!/_2\left[\hat{\sigma}_{\alpha\theta}\ I)+\hat{\sigma}_{\beta\theta}\ II)+\hat{\sigma}_{\theta\theta}\ III)\right],\qquad(۲۹)$$
$$I=l_{\alpha\alpha\alpha}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}+l_{\alpha\beta\alpha}\hat{\sigma}_{\alpha\beta}+l_{\alpha\theta\alpha}\hat{\sigma}_{\alpha\theta}+l_{\beta\alpha\alpha}\hat{\sigma}_{\beta\alpha}+l_{\beta\beta\alpha}\hat{\sigma}_{\beta\beta}+l_{\beta\theta\alpha}\hat{\sigma}_{\beta\theta}+l_{\theta\alpha\alpha}\hat{\sigma}_{\theta\alpha}+l_{\theta\beta\alpha}\hat{\sigma}_{\theta\beta}+l_{\theta\theta\alpha}\hat{\sigma}_{\theta\theta},$$
$$II=l_{\alpha\alpha\beta}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}+l_{\alpha\beta\beta}\hat{\sigma}_{\alpha\beta}+l_{\alpha\theta\beta}\hat{\sigma}_{\alpha\theta}+l_{\beta\alpha\beta}\hat{\sigma}_{\beta\alpha}+l_{\beta\beta\beta}\hat{\sigma}_{\beta\beta}+l_{\beta\theta\beta}\hat{\sigma}_{\beta\theta}+l_{\theta\alpha\beta}\hat{\sigma}_{\theta\alpha}+l_{\theta\beta\beta}\hat{\sigma}_{\theta\beta}+l_{\theta\theta\beta}\hat{\sigma}_{\theta\theta},$$
$$III=l_{\alpha\alpha\theta}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}+l_{\alpha\beta\theta}\hat{\sigma}_{\alpha\beta}+l_{\alpha\theta\theta}\hat{\sigma}_{\alpha\theta}+l_{\beta\alpha\theta}\hat{\sigma}_{\beta\alpha}+l_{\beta\beta\theta}\hat{\sigma}_{\beta\beta}+l_{\beta\theta\theta}\hat{\sigma}_{\beta\theta}+l_{\theta\alpha\theta}\hat{\sigma}_{\theta\alpha}+l_{\theta\beta\theta}\hat{\sigma}_{\theta\beta}$$
$$+l_{\theta\theta\theta}\hat{\sigma}_{\theta\theta}.$$

۲-۴- روش زنجیره‌های مارکف مونت‌کارلو (MCMC)

اگر مدل دارای پارامترهای زیادی باشد، تقریب لیندلی به‌خوبی مدل‌هایی با تعداد پارامتر کمتر عمل نمی‌کند. در چنین مواردی، می‌توان از روش تکراری *MCMC* برای برآورد پارامترها استفاده کرد.

چالش اصلی درروش مونت‌کارلو، استخراج نمونه از چگالی $f(x)$ است. روش نمونه‌گیری *MCMC*، یک زنجیره مارکفی نامتناوب و تحویل‌ناپذیر را ایجاد می‌کند که توزیع ایستای آن برابر با توزیع پسین موردنظر است. دو الگوریتم مهم برای تولید زنجیره‌های نمونه، الگوریتم متروپلیس-هستینگز و نمونه‌گیری گیبز هستند.

اگر تابع زیان برابر با مجذور خطا باشد، در این صورت میانگین توزیع پسین برای هریک از پارامترها، برآورد بیزان‌ها محسوب می‌شود.

۱-۲-۴- نمونه‌گیری گیبز

نمونه‌گیری گیبز یک کلاس گسترده از روش‌های *MCMC* است که در تحلیل بیزی مورداستفاده قرارمی گیرد. الگوریتم گیبز روشی برای تولید زنجیره مارکف است که حالت چندمتغیره روش متروپولیس-هستینگز (*MH*) محسوب می‌شود [27].

برای شروع این روش، لازم است که چگالی‌های حاشیه‌ای پسین پارامترهای مدل محاسبه شوند.

$$\pi_1\left(\alpha|\beta,\theta,x\right) \propto \alpha^{r+w_2-1}\prod_{i=1}^{r}(1+\theta x_i^{\alpha})\prod_{i=1}^{r}x_i^{\alpha-1}\,e^{-\beta\sum_{i=1}^{r}x_i^{\alpha}-w_1\alpha}\left\{1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}e^{-\beta c^{\alpha}}\right\}^{n-r}. \qquad (۳۰)$$

$$\pi_2\ \beta|\alpha,\theta,x) \propto \frac{\beta^{2\,r+w_4-1}}{\beta+\theta)^{r}}e^{-\beta\left(\sum_{i=1}^{r}x_i^{\alpha}+w_3\right)}\left\{1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}e^{-\beta c^{\alpha}}\right\}^{n-r}. \qquad (۳۱)$$

$$\pi_3\left(\theta|\alpha,\beta,x\right) \propto \frac{\theta^{w_6-1}}{\beta+\theta)^{r}}\prod_{i=1}^{r}1+\theta x_i^{\alpha})\left\{1+\frac{\beta\theta}{\beta+\theta}c^{\alpha}e^{-\beta c^{\alpha}}\right\}^{n-r}e^{-w_5\theta}. \qquad (۳۲)$$

قضیه ۲- اگر $w_4 > 1$ باشد، آنگاه توزیع شرطی β به‌شرط (x, θ, α)،مقعر لگاریتمی است.

اثبات:

$$\frac{\partial^2 log\,[\pi_2\ \beta|\alpha,\ \theta,\ x)]}{\partial\beta^2} = \frac{-(2\,r+w_4-1)}{\beta^2}+\frac{r}{(\beta+\theta)^4}-\frac{n-r)}{\beta+\theta)^2} < 0.$$

چگالی‌های پسین β,θ,α که در بالا ارایه شد، نامعلوم هستند؛ بنابراین از روش *MH* برای تولید متغیرهای تصادفی از این توزیع‌ها استفاده می‌کنیم. بهترین انتخاب برای توزیع پیشنهادی $gama(4\ ,2)$ است.گام‌های نمونه‌گیر گیبز به‌صورت زیراست:

۱. انتخاب برداری از مقادیر اولیه $(\alpha^{(0)}, \beta^{(0)}, \theta^{(0)})\Theta^{(0)}$
۲. $t=1$
۳. مقدار $\alpha^{(t)}$ را از توزیع شرطی $\pi\left(\alpha|\beta^{(t-1)}, \theta^{(t-1)}, x\right)$ بیرون می کشیم.
۴. مقدار $\beta^{(t)}$ را از توزیع شرطی $\pi\left(\beta|\alpha^{(t)}, \theta^{(t-1)}, x\right)$ با قرار دادن $\alpha^{(t)}$ به جای $\alpha^{(t-1)}$، انتخاب می کنیم.
۵. مقدار $\theta^{(t)}$ را از توزیع شرطی $\pi\left(\theta|\alpha^{(t)}, \beta^{(t)}, x\right)$ به دست می آوریم.
۶. $t=t+1$

گام‌های ۲ تا **۶** را T بار تکرار می‌کنیم.
اینک الگوریتم *MH* را برای **گام‌های ۳** تا **۵** اجرا می‌کنیم.

۱. $t = 1$

۲. w_3, w_2, w_1 را از توزیع پیشنهادی $(g \sim gama\left(4,2\right))$ تولید می‌کنیم.

۳. $k = 1,2,3$ $R_k = \frac{g(\theta^*)\pi_k(\theta^{(t-1)}|\theta^*)}{g(\theta^{t-1})\pi_k(\theta^*|\theta^{(t-1)})}$ را محاسبه می‌کنیم.

۴. احتمال پذیرش $P_k = min\{R_k,1\}$ را به دست می‌آوریم.

۵. u را از توزیع $U(0,1)$ تولید می‌کنیم.

۶. اگر $u < P_k$ باشد $w_i \;\; i = 1,2,3$ را می‌پذیریم. در غیر این صورت به مرحله بعد می‌رویم.

۷. $t = t + 1$

۸. **گام۲** تا **گام۷** را تکرار می‌کنیم.

۵- مطالعات شبیه‌سازی

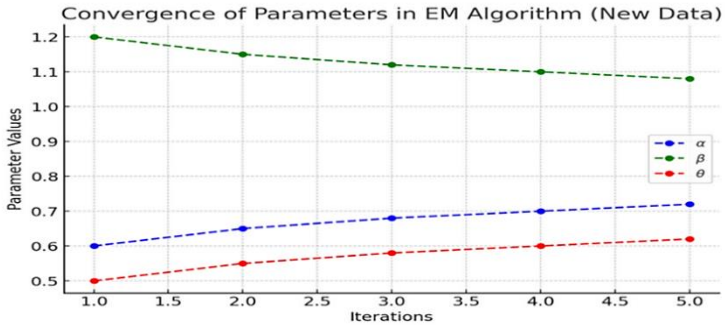
در مطالعات شبیه‌سازی به روش کلاسیک، ما نمونه‌ها را از توزیع EPL با $\alpha = 1$، $\beta = 1$، $\theta = 1$ و $n = 30$ تولید کردیم. فرآیند را ۱۰۰۰۰ بار تکرار کردیم. در برآورد پارامترها از روش ماکسیمم درستنمایی با استفاده از الگوریتم EM، شبیه‌سازی را برای مقادیر مختلف T, r, k انجام دادیم.

جدول ۱- برآورد پارامترها (θ, β, α) با استفاده از الگوریتم EM و انحراف معیار آن‌ها.

Table1- Programs (θ, b, α) using the EM algorithm and the deviation of those criteria.

T					
90	**75**	**30**	**4**	**k**	**r**
(0.604, 1.092, 0.906)	(0.603, 1.094, 0.904)	(0.601, 1.097, 0.902)	(0.600, 1.100, 0.900)	17	23
(0.006, 0.015, 0.006)	(0.014, 0.007, 0.005)	(0.013, 0.014, 0.008)	(0.006, 0.012, 0.009)		
(0.657, 1.111, 0.928)	(0.655, 1.113, 0.926)	(0.652, 1.117, 0.923)	(0.650, 1.120, 0.920)	27	33
(0.006, 0.014, 0.011)	(0.014, 0.016, 0.014)	(0.011, 0.017, 0.006)	(0.007, 0.012, 0.007)		
(0.678, 1.121, 0.939)	(0.676, 1.123, 0.937)	(0.673, 1.127, 0.934)	(0.670, 1.130, 0.930)	19	41
(0.006, 0.012, 0.014)	(0.007, 0.015, 0.010)	(0.008, 0.018, 0.008)	(0.006, 0.011, 0.007)		
(0.627, 1.106, 0.919)	(0.625, 1.108, 0.917)	(0.622, 1.112, 0.914)	(0.620, 1.115, 0.910)	25	25
(0.011, 0.016, 0.010)	(0.012, 0.011, 0.007)	(0.014, 0.011, 0.007)	(0.010, 0.011, 0.010)		
(0.707, 1.131, 0.949)	(0.705, 1.133, 0.947)	(0.702, 1.137, 0.944)	(0.700, 1.140, 0.940)	37	37
(0.005, 0.013, 0.012)	(0.013, 0.010, 0.011)	(0.008, 0.018, 0.010)	(0.009, 0.007, 0.008)		

برآوردهای α, β, θ در **جدول ۱** آورده شده است. در **شکل ۳** میزان همگرایی پارامترها داده شده است. نمودارهای همگرایی نشان می‌دهند که مقادیر پارامترهای α، β و θ به‌تدریج در طول تکرارها به حالت پایداری رسیده‌اند. نمودار همگرایی الگوریتم EM نشان می‌دهد که مقدار درستنمایی به‌مرور به حالت پایدار همگرا می‌شود. در گام‌های اولیه، افزایش سریع در مقدار درستنمایی نشان‌دهنده تاثیر بالای مراحل اولیه الگوریتم در بهبود مدل است. این نتایج بیانگر کارایی بالای الگوریتم EM در تخمین پارامترهای مدل است، به شرطی که داده‌ها به‌خوبی توزیع مناسبی داشته باشند. الگوریتم توانسته است با حداقل تعداد تکرار، مقادیر بهینه را پیدا کند و این نشان‌دهنده قدرت آن در مسائل پیچیده تخمین پارامتر است.



شکل ۳- روند همگرایی پارامترها در الگوریتم EM.

Figure 3- Ggplot for convergence of parameters in EM algorithm.

در برآورد پارامترها به روش بیز از دو روش تقریب لیندلی و $MCMC$ استفاده کرده‌ایم.

در **جدول ۲** برآورد بیزی را با استفاده از تقریب لیندلی محاسبه کرده و *MSE* برآوردها را به‌دست آورده‌ایم. هایپرپارامترهای توزیع‌های پیشین $w_1 = 2$، $w_2 = 4$ و $w_3 = 4$، $w_4 = 2$ و $w_5 = 4$، $w_6 = 2$ در نظر گرفته و برای مقادیر مختلف پارامتر وقتی‌که $n = 40$، $R = 20$ است نتایج را در **جدول ۲** آورده‌ایم.

جدول ۲- میانگین تخمین‌ها و میانگین مربعات خطا (MSE) پارامترها با تغییرات مختلف (α،β،θ) و T برای مقادیر ثابت n=40 و R=20.

Table 2- Average estimate (AE) and mean square error (MSEs) of the parameters for different variation of T when n = 40,R=20.

MSEθ	AEθ	MSEβ	AEβ	MSEα	AEα	T	θ	β	α
0.017000	0.095000	0.017589	0.099327	1.917222	1.337705	0.5	0.15	0.05	1.5
0.018000	0.100000	0.017139	0.095879	1.927086	1.342010	1.5	0.15	0.05	1.5
0.019500	0.105000	0.019676	0.104753	1.910326	1.330942	3.0	0.15	0.05	1.5
0.018000	0.098000	0.017694	0.099968	1.953364	1.347149	5.0	0.15	0.05	1.5
0.170000	0.310000	0.173613	0.315403	0.803665	0.887576	0.5	0.25	0.25	1
0.175000	0.320000	0.180251	0.322549	0.813284	0.892358	1.5	0.25	0.25	1
0.165000	0.310000	0.164529	0.309238	0.798596	0.879653	3.0	0.25	0.25	1
0.170000	0.315000	0.175689	0.318732	0.814237	0.891401	5.0	0.25	0.25	1
0.310000	0.470000	0.312891	0.468125	0.523181	0.650432	0.5	0.75	0.75	0.75
0.305000	0.460000	0.305284	0.459891	0.541254	0.661294	1.5	0.75	0.75	0.75
0.320000	0.470000	0.319843	0.472362	0.522416	0.649721	3.0	0.75	0.75	0.75
0.315000	0.465000	0.313121	0.464504	0.535193	0.658239	5.0	0.75	0.75	0.75
0.390000	0.560000	0.396814	0.561489	0.430712	0.567314	0.5	0.5	0.5	0.5
0.385000	0.550000	0.387913	0.553104	0.440257	0.573812	1.5	0.5	0.5	0.5
0.400000	0.565000	0.404762	0.569762	0.423890	0.560139	3.0	0.5	0.5	0.5
0.390000	0.555000	0.3932894	0.558493	0.437419	0.570204	5.0	0.5	0.5	0.5

در **جدول ۳**، برآورد بیزی پارامترها را با استفاده از زنجیره مارکف مونت‌کارلو به‌دست آورده و نتایج **جدول‌های ۱** تا **۴**، به شرح زیر گزارش می‌شود:

۱. برای مقدار ثابت T با افزایش k، r، مقدار پارامترها به مقادیر واقعی پارامتر نزدیک‌تر شده است.

۲. درصد همگرایی پارامترها با افزایش T، افزایش پیدا کرده است.

۳. مقادیر برآورد شده به روش بیزی با توجه به تابع زیان مربع خطا، با افزایش مقدار T به مقدار واقعی پارامتر نزدیک‌تر می‌شوند.

۴. *MSE* پارامترهای برآورد شده با کاهش T کمتر شده و نسبت به برآوردهای *MLE* مشابه کارایی کمتری دارند.

۵. مشاهده می‌شود که برآوردهای بیز از برآوردهای *MIE* ارییی کمتری دارند.

۶. در فواصل اطمینان بیشینه پسین داده‌شده، مشاهده می‌شود که در طرح سوم طول فواصل اطمینان برای α، β کوتاهتر ولی θ بیشتر شده است.

۷. واضح است که باوجوداینکه تابع ریسک وابسته به طرح است اما برآوردها سازگار هستند.

۸. با توجه به میانگین مربع خطا و انحراف استاندارد محاسبه در دو روش تقریب لیندلی و مونت‌کارلو مشاهده می‌شود که برآوردهای به‌دست آمده با استفاده از روش مونت‌کارلو کاراتر از برآوردهای دست آمده توسط تقریب لیندلی هستند.

جدول ۳- مقادیر ریسک برآوردشده همه برآوردها برای r, n داده‌شده و انحراف استاندارد آن‌ها.

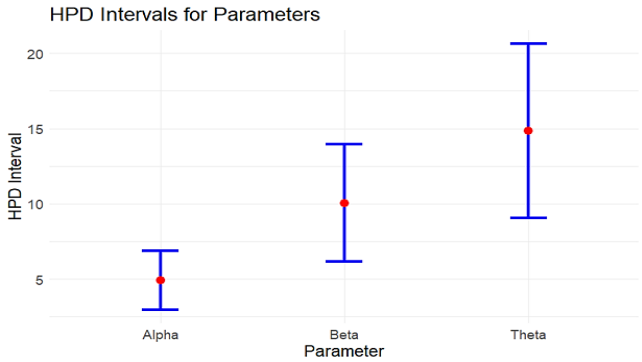
Table3- The estimated risk values and SD of all estimates for all estimate of n and r.

$\tilde{\Theta}$s (sd)	$\hat{\theta}$ (sd)	$\tilde{B}$s (sd)	$\hat{\beta}$ (sd)	$\tilde{A}$s (sd)	$\hat{\alpha}$ (sd)	r	n
0.784208(0.011)	0.800120(0.09)	1.285208(0.010)	1.290318(0.08)	3.378101(0.012)	3.410502(0.017)	5	20
0.816268(0.010)	0.825130(0.08)	1.328568(0.013)	1.335219(0.009)	3.302541(0.011)	3.328612(0.015)	10	40
0.834935(0.013)	0.845295(0.09)	1.398735(0.014)	1.408295(0.012)	3.005171(0.010)	3.238688(0.014)	15	60

جدول ۴-فواصل اطمینان HPD برای پارامترهایθ، β، α .

Table 4- The associated HPD credible intervals for α, β, θ.

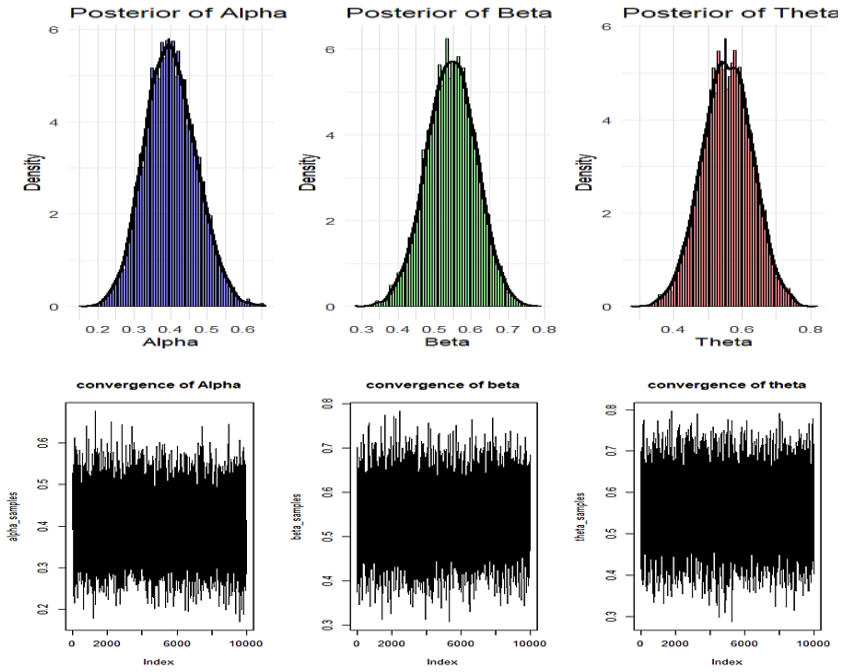
طول فواصل اطمینان α، β، θ	θ	β	α	r	n
2.3979, 1.3711, 0.3711	(0.1523, 0.5234)	(1.1523, 2.5234)	(2.1452, 4.5431)	5	20
2.4454, 1.3964, 0.3964	(0.1235, 0.5199)	(1.1235, 2.5199)	(2.1224, 4.5678)	10	40
2.4722,1.3946,0.3946	(0.1397,0.5343)	(1.1397,2.5343)	(2.1767, 4.5889)	15	60



شکل ۴- فواصل اطمینان بیشینه پسین برای α، β، θ.

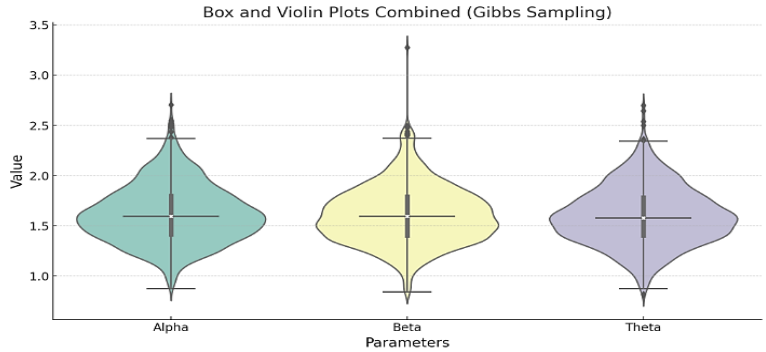
Figure 4- HPD interval for θ، β، α.

نمودارهای همگرایی نشان می‌دهند که مقادیر پارامترهای α، β و θ به‌تدریج در طول تکرارهای شبیه‌سازی مونت‌کارلو به حالت پایداری رسیده‌اند. در هر نمودار، نوسانات اولیه به‌مرور کاهش یافته و مقادیر حول یک نقطه ثابت تمرکز یافته‌اند. این رفتار بیانگر همگرایی مناسب الگوریتم است و نشان می‌دهد که تخمین‌ها به مقادیر واقعی نزدیک شده‌اند. نمودارها همچنین تفاوت در نوسانات هر پارامتر را نشان می‌دهند؛ β و θ پراکندگی کمتری دارند، درحالی‌که α دارای نوسانات بیشتری در طی تکرارهاست.



شکل ۵- نمودارهای هیستوگرام و همگرایی برای θ،β،α در شبیه‌سازی مونت‌کارلو.

Figure 5- Trace plot and Histogram MCMC for θ، β، α.

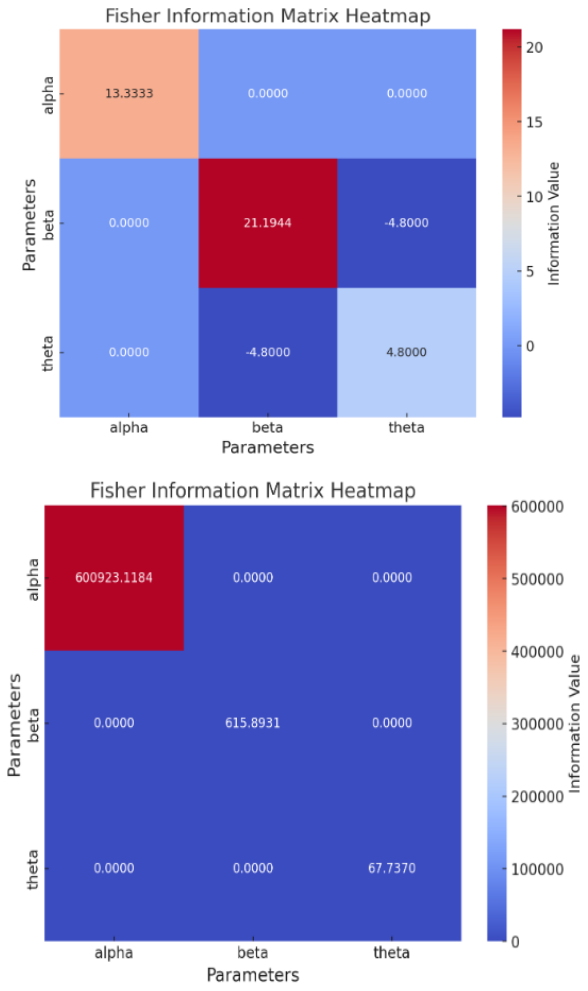


شکل ۶- نمودارهای ترکیبی جعبه‌ای و ویولن برای α، β، θ در نمونه‌گیری گیبز.

Figure 5- Box and Violin plotscombined in Gibbs sampling for θ، β، α.

در نمودار ترکیبی *Boxplot* و *Violin Plot*، جزئیات بیشتری از توزیع پارامترها ارایه شده است. بخش‌های میانی هر *Boxplot* موقعیت میانه داده‌ها و فاصله بین چارک‌ها (*IQR*) را نشان می‌دهد که محدوده داده‌های متمرکز را مشخص می‌کند. طول خطوط در بالا و پایین هر *Boxplot* نشان‌دهنده مقادیر افراطی و محدوده بازه داده‌ها است. با این‌حال، *Violin Plot* در پشت *Boxplot* به‌عنوان مکملی برای نمایش چگالی توزیع داده‌ها عمل می‌کند. چگالی داده‌ها در اطراف مقادیر خاص نشان‌دهنده تمرکز داده‌ها در آن بازه‌هاست. در مورد پارامتر α، مشاهده می‌شود که مقادیر بیشتر داده‌ها در بازه نزدیک به میانگین قرار گرفته‌اند. پهنای *Violin Plot* برای α در وسط آن نشان‌دهنده تراکم بالای داده‌ها در اطراف میانه است. بااین‌حال، دم‌های کوچک‌تر در دو انتهای آن نشان می‌دهد که داده‌های خارج از این بازه محدودتر هستند. برای پارامتر β، *Violin Plot* نشان‌دهنده یک توزیع مشابه اما کمی گسترده‌تر است، به‌طوری‌که تراکم داده‌ها در نزدیکی مرکز بازه کاهش یافته است. این موضوع نشان می‌دهد که β دارای نوسانات بیشتری است و نسبت به α حساس‌تر به تغییرات داده‌ها عمل می‌کند. در مورد θ، توزیع تقریبا مشابهی با β دارد اما با تغییرات کمتر در دم‌ها. این موضوع نشان می‌دهد که θ در مقایسه با β پایداری بیشتری دارد و داده‌ها تمایل بیشتری به متمرکز شدن در اطراف مقدار خاصی دارند.

نمودارهای ارایه شده ابزار بسیار قدرتمندی برای تحلیل هم‌زمان رفتار هر پارامتر و رابطه آن‌ها هستند. تمرکز داده‌ها در *Boxplots* همراه با شکل *Violin Plots* نشان می‌دهد که شبیه‌سازی به‌خوبی انجام شده است و الگوریتم‌های استفاده‌شده، همگرایی مناسبی برای پارامترها فراهم کرده‌اند. مقادیر مربوط به ماتریس اطلاعات فیشر نشان می‌دهد که مقدار اطلاعات در رابطه با پارامتر α بسیار بالاست و این پارامتر بیشترین تاثیر را بر روی مدل دارد. این موضوع از مقدار بالای المان α در ماتریس مشخص است. برای پارامتر β، مقدار اطلاعات نیز قابل‌توجه است اما بسیار کمتر از α می‌باشد. پارامتر θ کمترین مقدار اطلاعات را ارایه می‌دهد که نشان‌دهنده حساسیت کمتر مدل نسبت به تغییرات در این پارامتر است. مقادیر سایر عناصر ماتریس که نشان‌دهنده اطلاعات مشترک بین پارامترها هستند مانند (α,β) یا (α,θ) تقریبا صفر هستند، که بیانگر این است که این پارامترها تاثیر متقابلی بریکدیگر ندارند یا این تاثیر بسیار ناچیز است.



شکل ۷- ماتریس اطلاع فیشر برای θ،β،α.

Figure 4- Heatmap plots of Fisher information matrix for θ،β،α.

۶- مثال واقعی

در این بخش، یک مجموعه داده واقعی را برای نشان دادن روش پیشنهادی ارایه می‌دهیم. این مجموعه داده‌ها نخستین بار توسط چیکارا و فولکز [28] موردتوجه قرار گرفت. سپس کومارسینگ و همکاران [29] این مجموعه داده‌ها را برای مدل لوماکس به‌کار بردند. ۴۶ داده مربوط به زمان تعمیر(به ساعت) برای یک فرستنده ارتباطی هوابرد به‌صورت مرتب‌شده داده شده است.

0.2, 0.3, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.6, 0.6, 0.7, 0.7, 0.7, 0.8, 0.8, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.1, 1.3, 1.5, 1.5, 1.5, 1.5, 2.0,
2.0, 2.2, 2.5, 2.7, 3.0, 3.0, 3.3, 3.3, 4.0, 4.0, 4.5, 4.7, 5.0, 5.4, 5.4, 7.0, 7.5, 8.8, 9.0, 10.3, 22.0, 24.5.

جدول ۵- برآورد ماکسیمم درستنمایی و الگوریتم EM و انحراف استاندارد آن‌ها.

Table 5- Maximum likelihood estimation and EM algorithm and their standard deviation.

EM Estimate(sd)	MLE Estimate(sd)	Parameter
0.980125(0.011)	0.980125(0.008)	Shape (α)
3.761722(0.010)	3.761722(0.012)	Scale (θ)
0.265302(0.009)	0.265302(0.007)	Rate (β)

بر اساس برآوردهای *MLE* و *EM* برای پارامترهای مدل *EPL*، مشاهده می‌شود که پارامترهای شکل (α)، مقیاس (θ) و نرخ (β) در هر دو روش به‌طور دقیق یکسان هستند. مقدار برآورد شده برای پارامتر شکل (α) برابر با 0.980125 و برای مقیاس (θ) برابر با 3.761722 است. همچنین پارامتر نرخ (β) برابر با 0.265302 برآورد شده است. این تطابق بین برآوردهای دو روش نشان‌دهنده دقت بالای مدل *EPL* در برازش داده‌ها با استفاده از هر دو روش است.

جدول ۶- برآورد پارامترها و مقدار LogL– و AIC و BIC.

Table 6- Estimation or parameters and–logL, AIC, BIC value.

BIC	AIC	-LogL	SD (α, β, θ)	Estimate (α, β, θ)	Model
219.687	216.030	106.015	0.008,0.009,0.012	0.980125, 0.265302,3.761722	EPL
290.010	233.086	109.543	0.010,-,0.013	0.150,-,4.100	Weibull

بر اساس نتایج مدل *EPL*، پارامترهای شکل (α) و مقیاس (θ) به ترتیب برابر با 0.980125 و 3.761722 برآورد شده‌اند. مقدار *LogL*-برابر با 106.015– است که نشان‌دهنده مقادیر منفی لاگ–درستنمایی برای مدل *EPL* می‌باشد. همچنین، معیارهای *AIC* و *BIC* به ترتیب 216.030 و 219.687 محاسبه شده‌اند. این مقادیر برای ارزیابی کیفیت مدل *EPL* استفاده می‌شوند *AIC* (معیار اطلاعات آکاییک) و *BIC* (معیار اطلاعات بیزی) هر دو معیارهایی برای انتخاب مدل‌های آماری هستند و معمولا مدل‌هایی با کمترین مقادیر این شاخص‌ها بهترین برازش را دارند. این نتایج نشان می‌دهند که مدل *EPL* در مقایسه با مدل وایبول با این پارامترها به‌خوبی به داده‌های موجود برازش یافته است.

جدول ۷- تخمین میانگین (AE) و برآوردهای بیزی پارامترها بر اساس داده‌های واقعی.

Table 7- Average estimate (AE), Bayesian estimate of parameters based on real data.

بیزی (α)	بیزی (θ)	بیزی (β)	AE (θ)(SD)	AE (β)(SD)	AE (α)(SD)	R	T	n
1.75	3.9137	0.26065	3.2375(0.013)	0.2649(0.007)	0.980125(0.010)	40	4.5	30
1.75	3.9137	0.26065	3.2358(0.012)	0.2758(0.009)	0.980125(0.009)	35	5.0	35
1.75	3.9137	0.26065	3.2358(0.010)	0.2758(0.008)	0.980125(0.011)	25	7.0	25
1.75	3.9137	0.26065	3.2355(0.009)	0.2758(0.010)	0.980125(0.012)	20	10	20

۷- بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، استنباط آماری پارامترهای مجهول توزیع لیندلی توانی تعمیم‌یافته (*EPL*) در شرایط داده‌های سانسور شده هیبرید نوع دوم موردبررسی قرار گرفت. در این راستا، هر دو رویکرد کلاسیک و بیزی برای برآورد پارامترهای نامعلوم ارایه شدند.

نتایج نشان داد که برآوردهای ماکسیمم درستنمایی (*MLE*) فاقد فرم بسته هستند؛ ازاین‌رو، برای محاسبه این برآوردها از الگوریتم *EM* به‌عنوان یک روش تقریبی استفاده شد. بررسی‌ها نشان داد که برآوردهای به‌دست‌آمده از این روش به مقادیر واقعی پارامترها بسیار نزدیک هستند.

در ادامه، برای برآورد بیزی پارامترها تحت تابع زیان مربع خطا اقدام شد. در این حالت نیز به دلیل نبود فرم بسته برای برآوردها، از تقریب لیندلی بهره گرفتیم. علاوه بر این، برای محاسبه فواصل اطمینان *HPD* از روش نمونه‌گیری گیبز استفاده شد. نتایج حاکی از آن بود که استفاده از زنجیره مارکوف مونت‌کارلو[1] (*MCMC*) نسبت به تقریب لیندلی از نظر سادگی و دقت عملکرد بهتری دارد.

سپس یک مجموعه داده واقعی را برای نشان دادن روش پیشنهادی ارایه دادیم که شامل ۴۶ داده مربوط به زمان تعمیر (به ساعت) برای یک فرستنده ارتباطی هوابرد هستند. بر اساس برآوردهای *MLE* و *EM* برای پارامترهای مدل *EPL*، مشاهده می‌شود که پارامترهای شکل (α)، مقیاس (θ) و نرخ (β) در هر دو روش به‌طور دقیق یکسان هستند. مقدار برآورد شده برای پارامتر شکل (α) برابر با 0.980125 و برای مقیاس (θ) برابر با 3.761722 است. همچنین پارامتر نرخ (β) برابر با 0.265302 برآورد شده است. این تطابق بین برآوردهای دو روش نشان‌دهنده دقت بالای مدل *EPL* در برازش داده‌ها با استفاده از هردو روش است.

در این پژوهش، تمرکز بر داده‌های سانسورشده هیبرید نوع دوم بود، اما روش‌های پیشنهادی قابلیت تعمیم و کاربرد برای سایر طرح‌های سانسور را نیز دارند.

تقدیر و تشکر

نو یسندگان مقاله از سردبیر و داوران محترم مجله در ارزیابی مقاله قدردانی و تشکر می‌کند.

منابع

[1] Ghitany, M. E., Atieh, B., & Nadarajah, S. (2008). Lindley distribution and its application. *Mathematics and computers in simulation*, *78*(4), 493–506. https://doi.org/10.1016/j.matcom.2007.06.007
[2] Al-Mutairi, D. K., Ghitany, M. E., & Kundu, D. (2013). Inferences on stress-strength reliability from lindley distributions. *Communications in statistics-theory and methods*, *42*(8), 1443–1463. https://doi.org/10.1080/03610926.2011.563011
[3] Bakouch, H. S., Al-Zahrani, B. M., Al-Shomrani, A. A., Marchi, V. A. A., & Louzada, F. (2012). An extended Lindley distribution. *Journal of the Korean statistical society*, *41*(1), 75–85. https://doi.org/10.1016/j.jkss.2011.06.002
[4] Bhati, D., Malik, M. A., & Vaman, H. J. (2015). Lindley-Exponential distribution: Properties and applications. *Metron*, *73*(3), 335–357. https://doi.org/10.1007/s40300-015-0060-9
[5] Alkarni, S. H. (2015). Extended inverse Lindley distribution: properties and application. *SpringerPlus*, *4*(1), 1–13. https://doi.org/10.1186/s40064-015-1489-2
[6] Sharma, V. K., Singh, S. K., & Singh, U. (2017). Classical and Bayesian methods of estimation for power Lindley distribution with application to waiting time data. *Communications for statistical applications and methods*, *24*(3), 193–209. https://doi.org/10.5351/CSAM.2017.24.3.193
[7] Shanker, R., Sharma, S., & Shanker, R. (2013). A two-parameter Lindley distribution for modeling waiting and survival times data. *Applied mathematics*, *4*(2), 363–368. https://doi.org/10.4236/am.2013.42056
[8] Hofan Alkarni, S. (2015). Extended power lindley distribution: A new statistical model for non-monotone survival data. *European journal of statistics and probability*, *3*(19), 19–34. https://B2n.ir/pe2916
[9] Ghitany, M. E., Al-Mutairi, D. K., Balakrishnan, N., & Al-Enezi, L. J. (2013). Power Lindley distribution and associated inference. *Computational statistics and data analysis*, *64*, 20–33. https://doi.org/10.1016/j.csda.2013.02.026
[10] Makhdoom, I., Nasiri, P., & Pak, A. (2016). Bayesian approach for the reliability parameter of power Lindley distribution. *International journal of system assurance engineering and management*, *7*(3), 341–355. https://doi.org/10.1007/s13198-016-0476-5
[11] Alotaibi, R., Nassar, M., Rezk, H., & Elshahhat, A. (2022). Inferences and engineering applications of alpha power Weibull distribution using progressive type-II censoring. *Mathematics*, *10*(16), 1–21. https://doi.org/10.3390/math10162901

[1] Markov Monte Carlo (MMC)

[12] Elgarhy, M., Al Mutairi, A., Hassan, A. S., Chesneau, C., & Abdel-Hamid, A. H. (2023). Bayesian and non-bayesian estimations of truncated inverse power Lindley distribution under progressively type-II censored data with applications. *AIP advances*, *13*(9), 1–36. https://doi.org/10.1063/5.0172632
[13] Balakrishnan, N., & Kundu, D. (2013). Hybrid censoring: Models, inferential results and applications. *Computational statistics and data analysis*, *57*(1), 166–209. https://doi.org/10.1016/j.csda.2012.03.025
[14] Childs, A., Chandrasekar, B., Balakrishnan, N., & Kundu, D. (2003). Exact likelihood inference based on Type-I and Type-II hybrid censored samples from the exponential distribution. *Annals of the institute of statistical mathematics*, *55*, 319-330. https://doi.org/10.1007/BF02530502
[15] Tsai, T. R., Lio, Y., & Ting, W. C. (2021). Em algorithm for mixture distributions model with type-i hybrid censoring scheme. *Mathematics*, *9*(19), 2483. https://doi.org/10.3390/math9192483
[16] Kundu, D., & Pradhan, B. (2009). Estimating the parameters of the generalized exponential distribution in presence of hybrid censoring. *Communications in statistics-theory and methods*, *38*(12), 2030–2041. https://doi.org/10.1080/03610920802192505
[17] Ng, H. K. T., Chan, P. S., & Balakrishnan, N. (2002). Estimation of parameters from progressively censored data using EM algorithm. *Computational statistics and data analysis*, *39*(4), 371–386. https://doi.org/10.1016/S0167-9473(01)00091-3
[18] Society, R. S. (2016). Finding the observed information matrix when using the EM algorithm. *Journal of the royal statistical society, series B (Statistical methodology)*, *44*(2), 226–233. https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1982.tb01203.x
[19] Hartley, H. O., & Hocking, R. R. (1971). The analysis of incomplete data. *Biometrics*, 783-823. https://www.jstor.org/stable/2528820
[20] Habibi Rad, A., & Izanlo, M. (2012). An EM algorithm for estimating the parameters of the generalized exponential distribution under unified hybrid censored data. *Journal of statistical research of Iran JSRI*, *8*(2), 215–228. (**In Persian**). http://jsri.srtc.ac.ir/article-1-74-en.html
[21] Gupta, R. D., & Kundu, D. (2001). Exponentiated exponential family: An alternative to gamma and Weibull distributions. *Biometrical journal*, *43*(1), 117–130. https://doi.org/10.1002/1521-4036(200102)43:1<117::AID-BIMJ117>3.0.CO;2-R
[22] Lindley, D. V. (1972). *Bayesian statistics: A review*. SIAM. https://epubs.siam.org/doi/pdf/10.1137/1.9781611970654.bm
[23] Sharma, V. K., Singh, S. K., Singh, U., & Agiwal, V. (2015). The inverse Lindley distribution: A stress-strength reliability model with application to head and neck cancer data. *Journal of industrial and production engineering*, *32*(3), 162–173. https://doi.org/10.1080/21681015.2015.1025901
[24] Sharma, V. K., Singh, S. K., Singh, U., & Ul-Farhat, K. (2017). Bayesian estimation on interval censored Lindley distribution using Lindley's approximation. *International journal of system assurance engineering and management*, *8*, 799–810. https://doi.org/10.1007/s13198-016-0528-x
[25] Sultan, K. S., Alsadat, N. H., & Kundu, D. (2014). Bayesian and maximum likelihood estimations of the inverse Weibull parameters under progressive type-II censoring. *Journal of statistical computation and simulation*, *84*(10), 2248–2265. https://doi.org/10.1080/00949655.2013.788652
[26] Butts, C. T. (2007). Statistical mechanical models for social systems. *Constructal theory of social dynamics* (pp. 197–223). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-47681-0_11
[27] McCarthy, M. A. (2012). MCMC algorithms. *Bayesian methods for ecology*, 277–281. https://doi.org/10.1017/CBO9780511802454.016
[28] Chhikara, R. S., & Folks, J. L. (1977). The inverse Gaussian distribution as a lifetime model. *Technometrics*, *19*(4), 461–468. https://doi.org/10.1080/00401706.1977.10489586
[29] Yadav, A. S., Singh, U., & Singh, S. K. (2017). Bayesian estimation of Lomax distribution under type-II hybrid censored data using Lindley's approximation method. *International journal of data science*, *2*(4), 352-368. https://doi.org/10.1504/ijds.2017.10009048